МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В помощь практическим занятиям

Учебное пособие
для студентов университетов

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2007

УДК 378(075.8):517.521.3
ББК 22.161я73
Х82

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты:
доценты факультета ВМиК МГУ *Мухин С.И.*, *Фомичёв В.В.*

Хорошилова Е.В.

Х82 **Математический анализ: неопределённый интеграл** (в помощь практическим занятиям): Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001 г.), МАКС Пресс, 2007.– 184с.
ISBN 978-5-89407-292-0
ISBN 978-5-317-02090-3

В книге приводятся основные теоретические сведения о неопределённых интегралах, рассмотрено большинство известных приёмов и методов интегрирования и различные классы интегрируемых функций (с указанием способов интегрирования). Изложение материала подкреплено большим количеством разобранных примеров вычисления интегралов (более 200 интегралов), в конце каждого параграфа приводятся задачи для самостоятельного решения (более 200 задач с ответами).

Пособие содержит следующие параграфы: «Понятие неопределённого интеграла», «Основные методы интегрирования», «Интегрирование рациональных дробей», «Интегрирование иррациональных функций», «Интегрирование тригонометрических функций», «Интегрирование гиперболических, показательных, логарифмических и других трансцендентных функций».

Книга предназначена для освоения на практике теории неопределённого интеграла, выработки *навыков практического интегрирования*, закрепления курса лекций, использования на семинарах и во время подготовки домашних заданий. Цель пособия – помочь студенту в освоении различных приёмов и методов интегрирования.

Для студентов университетов, в том числе математических специальностей, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 378(075.8):517.521.3
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-89407-292-0
ISBN 978-5-317-02090-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Брошюра посвящена одной их важнейших тем, традиционно изучаемых на первом курсе высших учебных заведений – интегральному исчислению. Не все поступившие на первый курс изучали эту тему в средней школе, а научиться хорошо интегрировать за время отведённых по учебной программе 3-4 семинарских занятий является трудно выполнимой задачей даже для способных молодых людей, получивших в средней школе начальный опыт. Дело в том, что необходимо разбираться в существующих приёмах интегрирования и многочисленных подстановках, на изучение которых требуется определённое время для выработки практических навыков. Данная брошюра написана именно для того, чтобы любой студент, начинающий изучать интегральное исчисление, мог получить в сжатом виде информацию о наиболее изученных *классах интегрируемых функций* одной вещественной переменной, а также об основных *методах вычисления неопределённых интегралов*. Это тем более важно, что полученные при этом навыки пригодятся в будущем при изучении определённых, а также кратных, поверхностных, криволинейных и прочих видов интегралов.

В начале брошюры приводятся определения первообразной и неопределённого интеграла, сформулированы важнейшие свойства интегралов, даётся таблица наиболее часто используемых интегралов от элементарных функций, а затем для каждого класса интегрируемых функций (рациональные дроби, иррациональные, тригонометрические и др. функции) рассматриваются соответствующие приёмы интегрирования. В этом смысле данное пособие является мини-*справочником* по приёмам интегрирования. Каждый из приведённых способов вычисления интегралов иллюстрируется примерами решения задач.

Конечно, разобранных в пособии примеров задач недостаточно для более *детального* изучения этого раздела интегрального исчисления. В известной мере брошюра является лишь путеводителем по неопределённым интегралам, с помощью которого можно начать осваивать данный раздел. Практическое интегрирование с необходимостью должно предваряться изучением теории неопределённых интегралов с подробными выводами, теоремами и обоснованиями. При этом рекомендуется обращаться к проверенным временем учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г.М. Фихтенгольца, Л.Б.Кудрявцева и С.М. Никольского, В.А. Ильина, Э.Г. Позняка, В.А. Садовничего, Бл.Х. Сендова и др.), научным трудам известных математиков по упомянутой теме, а также лекциям, читаемым для студентов факультета. И, конечно, работу с данной брошюрой надо сочетать с решением достаточного количества задач. Только тогда будут приобретены необходимые навыки практического интегрирования.

И в заключение несколько практических советов студентам. Следует иметь в виду, что проработку материала по любой теме не стоит откладывать «на потом», т.е на время сессии. Лучше всего делать это постепенно, параллельно тому, как на практических занятиях изучается с преподавателем тот или иной раздел. Если при этом возникают вопросы, то не надо стесняться задавать их преподавателю и свом коллегам. Важно проявлять инициативу, консультироваться у людей, лучше вас разбирающихся в данной области, используя любую возможность, поскольку вы заинтересованы в том, чтобы хорошо освоить изучаемую дисциплину.

Отвечая на экзамене на вопрос билета, чётко формулируйте необходимые определения и свойства. Надо приучить себя к аккуратности и строгости проведения математических доказательств, быть готовым в любой момент, если понадобится, привести все необходимые пояснения и обоснования. Поэтому при работе с учебной литературой сразу обращайте внимание на встречающиеся в тексте определения и формулировки свойств, старайтесь их запомнить. Следует помнить, что во время экзамена студенту обычно предлагается решить одну или несколько задач, продемонстрировав тем самым навыки и умения использовать свои знания на практике. Для этого, как уже отмечалось выше, необходим соответствующий опыт и постоянная тренировка в решении задач.

Пособие написано автором, кандидатом физ.-мат. наук, доцентом, на основе многолетнего опыта ведения семинаров по математическому анализу на 1-м курсе факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова.

С уважением,
автор

§ 1.

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

«***Интегральное исчисление*** – раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями интегрального исчисления являются неопределённый интеграл и определённый интеграл. Этот раздел тесно связан с дифференциальным исчислением, вместе с которым составляет одну из основных частей математического анализа. Как дифференциальное, так и интегральное исчисление базируются на методе бесконечно малых или методе пределов».

Большой энциклопедический словарь [9]

«Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии».

В.И. Ленин

1.1. Историческая справка

В настоящее время изучение темы «интегралы» чаще всего начинают с понятия первообразной функции, потом вводят понятие неопределённого интеграла, изучают его свойства, и уже затем переходят к изучению определённого интеграла и его разновидностей (собственного и несобственного видов) и установлению тесной связи неопределённого и определённого интегралов. Однако исторически первоначально сформировалось понятие интеграла определённого.

Известно, что вплоть до конца XVII в. математики умели вычислять некоторые виды определённых интегралов, решая с их помощью отдельные практические задачи по вычислению площадей и объёмов тел, однако в то время ещё не существовало чёткого общего определения определённого интеграла. Не существовало тогда и понятия первообразной. Это было связано с недостаточным развитием теории пределов и основанного на ней дифференциального исчисления. Их развитие, в свою очередь, тормозилось отсутствием строгой теории вещественного числа.

В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий учёный *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646–1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники – *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661–1704), братья *Якоб* (1654–1705) и *Иоганн* (1667–1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707–1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были *Джон Валлис* (1616–1703) и *Исаак Барроу* (1630–1677), возглавляемая Ньютоном, состояла из английских и шотландских учёных. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698–1746). Работа обеих школ привела к большому прогрессу в области математического анализа, к созданию в достаточно законченном виде дифференциального и интегрального исчислений.

Так, Г. Лейбниц, исходя из понятия определённого интеграла, пришёл к понятию функции $F(x)$, являющейся первообразной для данной функции $f(x)$, так что $F'(x)=f(x)$. Отсюда следовало заключение о том, что дифференцирование и интегрирование являются двумя взаимно обратными операциями, вроде сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня. Вычисление интегралов Лейбниц и его ученики (первыми из которых являлись братья Я. и И. Бернулли) стали сводить к отысканию первообразных. При вычислении интегралов с определёнными пределами с помощью неопределённых интегралов как И. Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой. Среди используемых Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной, интегрирование по частям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Г. Лейбницу принадлежит также идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби, впоследствии усовершенствованная другими учёными. Именно Г. Лейбниц предложил использовать для обозначения интеграла знак $\int ydx$ (1686), где символ $\int$ есть стилизованное удлинённое S (первая буква слова "Summa"). Термин «первообразная» (или примитивная) функция ввёл в начале XVIII в. *Джозеф Луи Лагранж* (1736–1813). Термин «интеграл» впервые употребил в печати Я. Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление».

Независимо от Г. Лейбница и ещё до него эти результаты были получены *Исааком Ньютоном* (1643–1727). Многие задачи из механики и физики ведут, как известно теперь, к понятию первообразной функции и неопределённого интеграла, однако исторически, в частности у И. Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача квадратуры кривой. Ньютону удалось доказать, что площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью

абсцисс, сверху – графиком кривой $y=f(x)$, определённой и непрерывной на отрезке $[a,b]$, если её рассматривать на отрезке $[a,x]$, где x – произвольно взятое на $[a,b]$ значение, есть первообразная функция для функции $y=f(x)$: $S(x)=F(x)-F(a)$. Это равенство, пользуясь современными символами, можно записать в виде

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)-F(a).$$

Для определения площади всей криволинейной трапеции следует положить $x=b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Это и есть так называемая *формула Ньютона–Лейбница*, содержание которой по существу восходит к И. Барроу. В ней определённый интеграл, рассматриваемый как функция верхнего переменного предела интегрирования x, представлен в виде одной из первообразных $F(x)+C$ ($C=-F(a)$) подынтегральной функции $f(x)$. Эта формула носит также название *основной формулы интегрального исчисления*. Она позволяет сводить довольно сложное вычисление определённых интегралов, т.е. нахождение пределов интегральных сумм, к сравнительно более простой операции отыскания первообразных. Правая часть в этой формуле называется *двойной подстановкой* и записывается в виде $F(x)\Big|_a^b$. Итак, задача вычисления площади фигур, т.е. квадратура, ведёт к понятиям как определённого, так и неопределённого интеграла. Вот почему вычисление интегралов стали иногда называть *квадратурой*. Важнейшую роль в интегрировании Ньютон уделял разложению интегрируемой функции в степенной ряд и затем почленному его интегрированию. Интегрирование в конечном виде также не было оставлено Ньютоном без внимания, хотя играло в его исследованиях второстепенную роль.

В XVIII в. наибольший вклад в развитие и популяризацию дифференциального и интегрального исчислений внёс Л. Эйлер. До него кроме «Анализа бесконечно малых» Лопиталя (1696), содержащего лишь начальные сведения по дифференциальному исчислению, и курса лекций по интегральному исчислению И. Бернулли (1742), составленных, как и книга Лопиталя, в 90-х годах XVII в., по сути, не было никаких учебников или общих руководств по этой новой отрасли науки. Указанные две книги значительно устарели и в первой половине XVIII в. отстали от развития анализа. Остро чувствовалась потребность в новом систематическом курсе. Это обстоятельство и побудило

Эйлера составить полный курс математического анализа. Этот курс состоит из следующих книг.

1) «Введение в анализ бесконечных», 2 тома (1748).
2) «Дифференциальное исчисление», 1 том (1755).
3) «Интегральное исчисление», 3 тома (1768–1769).

Эти книги содержат как результаты работ предшественников и современников Эйлера, так и многие его собственные исследования в области анализа. В своих трудах Эйлер излагает многочисленные приёмы вычисления неопределённых интегралов, применяя и развивая новые методы такие, как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. В отличие от Лейбница у Эйлера, как и у Ньютона, исходным является понятие первообразной, т.е. неопределённого интеграла. «Неопределённым» интеграл называется потому, что определяется с точностью до произвольной постоянной C. Определённый интеграл был для Эйлера лишь частным случаем неопределённого, одной из первообразных. Именно Л. Эйлер предложил использовать знак $\sum$ (греческая буква «сигма») для обозначения интегральных сумм.

Существенный вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также французский учёный и просветитель *Жан Даламбер* (1717–1783) и, особенно, крупный французский математик *Огюстен Луи Коши* (1789–1857).

Развитием математического анализа в XIX в. занимались и русские учёные, например, *М.В. Остроградский* (1801–1862) и *П.Л. Чебышёв* (1821–1894). Академику Михаилу Васильевичу Остроградскому принадлежат такие важнейшие результаты в области интегрального исчисления, как формула, сводящая вычисление тройного (и, вообще, n-кратного) интеграла к вычислению двойного ($(n-1)$-кратного) интеграла, общий приём интеграции рациональных функций, формула преобразования переменных в многомерных интегралах и др. Пафнутий Львович Чебышёв посвятил шесть больших мемуаров интегрированию алгебраических функций. Среди его классических результатов имеется знаменитая теорема об интегрировании биномиальных дифференциалов.

Итак, рассмотрим задачу восстановления функции по её известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления. Процедура нахождения функции по её производной называется *интегрированием*. Интегрирование является процедурой обратной дифференцированию (нахождению производной от заданной функции).

1.2. Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла

Пусть на интервале (a,b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$.

<u>Опр.1</u> *(точной первообразной)*. Функция $F(x)$ называется точной первообразной по отношению к функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x)=f(x)dx$).

Например, функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел R, поскольку

$$(\sin x)' = \cos x .$$

<u>*Замечание*</u>. Под точной первообразной для функции $f(x)$ *на сегменте* $[a,b]$ будем понимать функцию $F(x)$, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a+0)$, равную $f(a+0)$, и левую производную $F'(b-0)$, равную $f(b-0)$.

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a,b) хотя бы одну первообразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F(x)+C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a,b), то любая другая первообразная $\overline{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F}(x)=F(x)+C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнём, что, в силу дифференцируемости, первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведённом выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция $f(x)$, определённая на (a,b), имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщённой первообразной.

<u>*Опр.2*</u> *(обобщённой первообразной)*. Функция $F(x)$ называется обобщённой первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если:

1) $F(x)$ непрерывна на (a,b);

2) в любой точке $x \in (a,b)$, за исключением, быть может, множества точек K, функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала (a,b) множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал (a,b) бесконечен, т.е. имеет вид $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$ или $(-\infty,+\infty)$, то множество K может быть счётным, но при этом каждый конечный подинтервал из (a,b) не должен содержать более конечного числа точек K.

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщённой первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то будем называть $F(x)$ просто *первообразной*.

<u>*Пример 1*</u>. *Найти все первообразные для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1,1)$.*

Решение. Покажем, что точная первообразная для данной функции
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \in (0,1), \\ 0, \text{если} & x = 0, \\ -1, \text{если} & x \in (-1,0), \end{cases}$$
на указанном интервале не существует и можно найти лишь обобщённую первообразную. Действительно, при $x \in (0,1)$ первообразная $F(x)$ имеет общий вид $x + C_1$, а при $x \in (-1,0)$, соответственно, вид $-x + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные действительные константы. Учтём, что в точке $x = 0$ первообразная должна быть непрерывной. Записав условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 0-0}(-x + C_2) = \lim\limits_{x\to 0+0}(x + C_1) = F(0)$, определяем искомое соотношение между константами: $C_2 = C_1$. Таким образом, общий вид любой из первообразных: $F(x) = |x| + C_1$, где $C_1 \in R$. Любая из этих функций непрерывна на $(-1,1)$ и

$\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$ её производная совпадает с $\operatorname{sgn} x$. При этом в точке $x = 0$ первообразная не имеет производной.

<u>*Пример 2*</u>. *Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.*

Решение. При $x > 0$ $f(x) = e^x$ и первообразная имеет вид $F(x) = e^x + C_1$, где $C_1 \in R$. При $x < 0$ $f(x) = e^{-x}$ и, соответственно, её первообразная имеет вид $F(x) = -e^{-x} + C_2$, $C_2 \in R$. Учтём теперь непрерывность первообразной в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(-e^{-x} + C_2) = \lim\limits_{x\to 0+0}(e^x + C_1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 + C_2 = 1 + C_1 \Leftrightarrow C_2 = C_1 + 2$.

Таким образом, общий вид любой из первообразных следующий:
$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, \text{если} & x \ge 0 \\ -e^{-x} + C_1 + 2, \text{если} & x < 0 \end{cases}.$$

Отметим, что, так как
$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(e^x + C_1) - (1 + C_1)}{x} = 1$$
и
$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{(-e^{-x} + C_1 + 2) - (1 + C_1)}{x} = \lim_{(-x)\to 0+0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1,$$
то $F(x)$ дифференцируема всюду, включая точку $x = 0$, т.е. мы нашли точную первообразную.

<u>*Опр.3*</u> *(неопределённого интеграла)*. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке (a,b) называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается
$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$
где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a,b), C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Область интегрирования (a,b) обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности $f(x)$). Например, $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int \max(1; x^2)dx$.

Решение. Рассмотрим случаи: $|x| \le 1$ и $|x| > 1$.

1) Если $-1 \le x \le 1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int dx = x + C$.

2) Если $x > 1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C_1$.

В силу непрерывности первообразной в точке $x = 1$ должно выполняться условие $1 + C = \dfrac{1}{3} + C_1$, откуда $C_1 = C + \dfrac{2}{3}$.

3) Если $x < -1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C_2$, соответственно для непрерывности первообразной в точке $x = -1$ должно выполняться равенство

$$-1 + C = -\frac{1}{3} + C_2, \text{ откуда } C_2 = C - \frac{2}{3}.$$

Итак, окончательно

$$\int \max(1; x^2)dx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3} + C, & \textit{где} \quad x < -1; \\ x + C, & \textit{где} \quad -1 \le x \le 1; \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3} + C, & \textit{где} \quad x > 1, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 4. Найти неопределённый интеграл

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx \qquad (0 \le x \le \pi).$$

Решение.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int |\cos x - \sin x|\,dx =$$

$$= \begin{cases} \int (\cos x - \sin x)dx, & \textit{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ \int (\sin x - \cos x)dx, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sin x + \cos x + C, & \textit{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ -\sin x - \cos x + C_1, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$$

В точке $x = \dfrac{\pi}{4}$ запишем условие непрерывности первообразных:

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + C = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + C_1,$$

или

$$\sqrt{2} + C = -\sqrt{2} + C_1, \text{ откуда } C_1 = C + 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \begin{cases} \sin x + \cos x + C, & \textit{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ -\sin x - \cos x + C + 2\sqrt{2}, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases} \qquad (1)$$

Замечание. Иногда в данной задаче приводят ответ в виде

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

Надо понимать, что это не вполне корректно. Действительно, так выглядит неопределённый интеграл *на каждом* из промежутков $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$. Однако *на всём отрезке* $[0, \pi]$ интеграл равен именно выражению (1).

Вообще, если в условии задачи сказано, что надо вычислить неопределённый интеграл, но не указано, на каком именно промежутке, то это подразумевает, что его требуется вычислить на области интегрируемости подынтегральной функции. И, строго говоря, в ответе следует указывать эту область интегрируемости, например, $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \ne 0)$.

Такая запись означает, что данная формула справедлива для любого интервала, не содержащего внутри себя значение $x = 0$ (в том числе для каждого из бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$). Эта форма ответа в данном случае единственно возможная, так как найти интеграл на объединении этих промежутков нельзя (первообразные терпят разрыв 2 рода в точке $x = 0$).

Иногда при вычислении интеграла применяется искусственный приём деления на некоторое выражение, которое, естественно, тогда не должно обращаться в нуль. Допустим, это выражение равно нулю при $x = x_0$. Тогда вычисляют интеграл при $x \neq x_0$, а в конце, если при этом значении x_0 ни подынтегральная функция, ни первообразные не имеют особенностей (определены и непрерывны), доопределяют полученное выражение для первообразных в точке x_0 их предельными значениями.

<u>Пример 5</u>. *Найти неопределённый интеграл* $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция определена, непрерывна и, следовательно, интегрируема при всех действительных x. При $x \neq 0$ имеем:

$$\int \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \int \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2} =$$

$$= \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{x}{x^2+x+1} + C.$$

В точке $x = 0$ подынтегральная функция и её первообразные $-\dfrac{x}{x^2+x+1} + C$ непрерывны, поэтому полученный для интеграла результат можно считать верным и при $x = 0$, если доопределить каждую из первообразных её значением в нуле.

Ответ: $-\dfrac{x}{x^2+x+1} + C$, $x \in R$.

<u>Пример 6</u>. *Найти неопределённый интеграл* $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. При $x \neq 0$ имеем:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}dx =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C.$$

Подынтегральная функция определена, непрерывна, а, следовательно, и интегрируема, при всех действительных значениях x. Интеграл вычислен сейчас отдельно на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Заметим, что в данном случае можно найти интеграл на всём множестве действительных чисел. Для этого надо дополнительно учесть условие непрерывности первообразных в нуле. Найдём

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}\right) = \mp\frac{\pi}{2\sqrt{5}}.$$

Поскольку оба односторонних предела в нуле существуют и конечны, то результат интегрирования можно представить в виде

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}} arctg \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}, x > 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} arctg \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C, \quad x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{5}} + C, \quad x = 0. \end{cases}$$

Обратим внимание читателя ещё на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ (или $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т.е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится совершенно аналогичными рассуждениями). Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой же ситуации при записи ответа (и непосредственно интегрировании) можно также использовать функцию сигнум.

Пример 7. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t=\frac{1}{x}$, тогда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t|=t\cdot\operatorname{sgn} t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}}=-\operatorname{sgn} t\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}}=-\arcsin|t|+C=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

1.3. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т.е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ всегда имеет на интервале (a,b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ $(a<x<b)$. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Функции, которые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены. К ним относятся, например,

интеграл Пуассона $\left(\int e^{-x^2}dx\right)$,

интегралы Френеля $\left(\int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx\right)$,

интегральный логарифм $\left(li(x)=\int \frac{dx}{\ln x}\right)$,

интегральные синус $\left(si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx\right)$

и косинус $\left(ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx\right)$,

интегральная показательная функция $\left(ei(x)=\int \frac{e^x}{x}dx\right)$.

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы $\int \frac{e^x}{x^n}dx$, $\int \frac{\sin x}{x^n}dx$, $\int \frac{\cos x}{x^n}dx$ $(n\in N)$ и многие другие. Так, интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+\delta}\right)dx$, как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют *специальными функциями*.

Даже если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближённо с некоторой степенью точности. Так, в курсе вычислительных методов изучаются специальные способы приближённого вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и пр. подходы).

1.4. Основные свойства неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения (см. доказательство в [2])

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C \quad (C \in R)$ (эти свойства отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).

3. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, где $C \in R \setminus \{0\}$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (свойство аддитивности; подразумевается, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве).

Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределённого интеграла, причём эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы. Следующее свойство 5 показывает, что приведённая ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

6. Одна из первообразных чётной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной функции есть функция чётная.

Рассмотрим далее *табличные* интегралы и наиболее *общие методы* вычисления неопределённых интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что приписывать константу C в неопределённом интеграле нужно обязательно, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Кроме того, надо приучить себя при вычислении неопределённых интегралов всегда указывать область интегрирования (аналог ОДЗ в уравнениях и неравенствах, области определения функций). Заметим также, что ниже мы будем говорить об интегралах только для непрерывных функций. Если же функция имеет точки разрыва, то рассматривать её будем лишь в промежутках её непрерывности, где интеграл от неё существует.

1.5. Таблица простейших интегралов

Отметим, что название «табличный интеграл» является довольно условным. Существует некоторый минимальный набор неопределённых интегралов, к которым наиболее часто сводится вычисление интегралов. В частности, к ним относят интегралы от некоторых известных элементарных функций. По мере того, как вы приобретаете всё больше навыков в вычислении неопределённых интегралов, понятие «табличного интеграла» расширяется, и в условную таблицу попадают многие из вычисленных прежде интегралов. Правильность выполненного интегрирования в случае сомнений всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат. Приведём лишь некоторые, наиболее часто употребляемые виды интегралов.

Интегралы от *степенных функций*:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in R, n \neq -1; x \in R)$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (n = -1, x \neq 0)$.

Интегралы от *показательных* и, в частности, экспоненциальной $(a = e)$ функций:

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1; x \in R)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

Интегралы от *тригонометрических функций*:

4. $\int \cos x dx = \sin x + C \quad (x \in R)$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (x \in R)$;

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$;

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$.

Интегралы от *рациональных функций*:

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$ ($x \in R$; этот интеграл подразумевает двоякую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление);

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$ $(x \in R)$; здесь и ниже параметр a считаем положительным;

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a)$.

Интегралы от *иррациональных функций*:

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (|x| < 1)$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (|x| < a)$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0)$;

14. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (|x| \leq a)$;

15. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C$.

Интегралы от *гиперболических функций*:

16. $\int chxdx = shx + C \quad (x \in R)$; 17. $\int shxdx = chx + C \quad (x \in R)$;

18. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C \quad (x \in R)$; 19. $\int \frac{dx}{sh^2x} = cthx + C \quad (x \neq 0)$.

Существуют специальные (пополняемые) таблицы неопределённых интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости (например, [12]).

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int |x|dx$. Ответ: $\frac{x|x|}{2} + C$.

2. $\int (|1+x| - |1-x|)dx$. Ответ: $\frac{1}{2}((1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|) + C$.

3. $\int f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0, \\ x+1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x + C, & \text{если } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 0{,}5 + C, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

4. $\int f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1 - |x|, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C, & \text{если } |x| \leq 1 \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{sgn} x + C, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

5. $\int \sqrt{1 - 2x^2 + x^4}\,dx$. Ответ: $\begin{cases} \frac{x^3}{3} - x - \frac{4}{3} + C, & \text{если } -\infty < x < 1, \\ x - \frac{x^3}{3} + C, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{4}{3} + C, & \text{если } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$

6. $\int (-1)^{[x]}dx$. Ответ: $|x - 2n| + C$, где $2n - 1 \leq x \leq 2n + 1$, $n \in Z$.

7. $\int \min(5 - x^2, 1, x^2)dx$. Ответ: $\begin{cases} 5x - \frac{x^3}{3} + 6, & x < -2 \\ x + \frac{2}{3}, & -2 \leq x < -1 \\ \frac{x^3}{3}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{2}{3}, & 1 < x \leq 2 \\ 5x - \frac{x^3}{3} - 6, & x > 2. \end{cases}$

§ 2.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Практически любой неопределённый интеграл вычисляется путём его упрощения и сведения в конечном итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к *основным методам интегрирования* следующие три способа интеграции:

– использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов;
– замена переменной интегрирования;
– интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения. Остановимся на каждом из перечисленных методов подробнее.

2.1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований

Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;
– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение;

– выделение полных квадратов (кубов);
– использование формул сокращённого умножения;
– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);
– выделение в числителе дроби производной от знаменателя;
– использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т.п.

Разнообразные примеры использования перечисленных и некоторых других приёмов рассматриваются ниже в тексте пособия. Обращайте на них внимание и старайтесь запоминать, в каких случаях какие приёмы удобно использовать.

Вообще, умение найти для вычисляемого интеграла наиболее краткий и «красивый» способ интегрирования является часто непростой задачей. Это умение вырабатывается постепенно и приходит с опытом.

2.2. Интегрирование путём замены переменной

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций– *метод замены переменной*, или *метод подстановки*. Рассмотрим два возможных случая.

1. *Внесение функции под знак дифференциала*. Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t=t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))\cdot t'(x)dx = \int g(t)dt. \qquad (1)$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),$$
$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(arctgx),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и т.п..}$$

Замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ *удобнее для интегрирования* по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t)+C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путём обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Рассмотрим здесь лишь два примера вычисления интегралов этим методом. Множество других примеров вы сможете найти в тексте пособия.

Пример 1. а) $\int \sin^3 x\cos x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; в) $\int e^{5x}dx$.

Решение. а) Так как $d(\sin x) = \cos x dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x\cos x dx = \sin^3 x d\sin x = t^3 dt.$$

Интеграл от последнего выражения вычисляется легко:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Отметим, что в данном примере основным назначением сделанной замены переменной было сведение интеграла от трансцендентной функции тригонометрического вида к интегралу от рациональной алгебраической функции.

Заметим также, что при определённом навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде и не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t. Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

В следующих двух примерах при сведении интегралов к табличным также не будем вводить новые переменные, а сразу запишем результат:

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C;$$

в) $$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

2. *Использование подстановок*. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)dt. \qquad (2)$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Рассмотрим пример задачи, где при вычислении интеграла возможны сразу несколько различных подстановок. Следовательно, возникает проблема выбора наиболее оптимальной из них. А для того чтобы выбрать более удобную подстановку, надо знать их разновидности и области применения. Итак, сравнивайте и выбирайте.

Пример 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. *1-й способ* (*подстановка* $t = \frac{1}{x}$). ОДЗ: $|x| > 1$. Воспользуемся подстановкой $t = \frac{1}{x}$, тогда

$$dx = -\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|},$$

и, учитывая тождество $|t| = t\cdot\operatorname{sgn} t$, в результате получаем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int\frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} =$$

$$= -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

<u>2-й способ</u> (*подстановка* $t = \sqrt{x^2-1}$).

Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2-1}$, тогда $x^2 = t^2+1$, $xdx = tdt$ и

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int\frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C =$$

$$= arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

<u>3-й способ</u> (*тригонометрическая подстановка* $x = \dfrac{1}{\sin t}$).

Выполним тригонометрическую подстановку $x = \dfrac{1}{\sin t}$, где

$t \in \left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \dfrac{\cos t}{|\sin t|}$

$= \operatorname{sgn}(\sin t)\cdot ctgt$, $dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ и для интеграла имеем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(\sin t)\int\frac{-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\dfrac{1}{\sin t}\cdot ctgt} = -\operatorname{sgn}(\sin t)\int dt =$$

$$-\operatorname{sgn}(\sin t)\cdot t + C = -\operatorname{sgn} x\cdot\arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

Заметим, что можно было бы вычислить данный интеграл с помощью аналогичной подстановки через косинус:

$$x = \frac{1}{\cos t},\ \text{где}\ t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

<u>4-й способ</u> (*гиперболическая подстановка* $|x| = cht$).

Теперь вычислим интеграл при помощи гиперболической подстановки $|x| = cht$, $t \ge 0$. Тогда $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{ch^2 t-1} = \sqrt{sh^2 t} = |sht|$ и, следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{d|x|}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{d(cht)}{cht\cdot|sht|} = \int\frac{sht}{cht\cdot\operatorname{sgn}(sht)sht}dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(sht)\int\frac{dt}{cht} = \operatorname{sgn}(sht)\int\frac{cht\cdot dt}{ch^2 t} = \operatorname{sgn}(sht)\int\frac{d(sht)}{1+sh^2 t} =$$

$$= \operatorname{sgn}(sht)\int\frac{d(sht)}{1+sh^2 t} = \operatorname{sgn}(sht)\cdot arctg(sht) + C = arctg|sht| + C =$$

$$= arctg\sqrt{ch^2 t-1} + C = arctg\sqrt{x^2-1} + C.$$

<u>5-й способ</u> (*1-я подстановка Эйлера*).

Положим $t = \sqrt{x^2-1} + x$, тогда $x^2 - 1 = (t-x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2t} \Rightarrow$

$dx = \dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\dfrac{t^2-1}{2t^2}}{\dfrac{t^2+1}{2t}\cdot\dfrac{t^2-1}{2t}}dt = 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C =$$

$$= 2arctg\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) + C.$$

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже в соответствующих пунктах.

2.3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или, в краткой форме,

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путём интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^n e^{ax}dx,\ \int x^n \sin axdx,\ \int x^n \cos axdx,\ \int x^n \ln^m xdx$$

$$(n, a \in R, n \neq -1, m \in N),\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx, \text{ а также}$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx\ (a, b \in R), \int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx$$

$$\int P(x)\cos axdx, \int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x) arctgxdx,\ \int P(x) arcctgxdx,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен относительно x

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ \ (a_i \in R, a_n \neq 0),$$

которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. При этом в интегралах

$$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; а в интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x) arctgxdx,\ \int P(x) arcctgxdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Повторное применение правила интегрирования по частям приводит к так называемой *обобщённой формуле интегрирования по частям*. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в рассматриваемом промежутке непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно:

$$u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}.$$

Тогда имеет место формула

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx .$$

Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из сомножителей в подынтегральной функции служит алгебраический многочлен n-й степени. Тогда производная $u^{(n+1)}$ тождественно равна нулю и для интеграла в левой части получается окончательное выражение.

С помощью интегрирования по частям иногда удаётся вывести рекуррентную формулу понижения для отдельных типов интегралов, содержащих натуральный параметр n, позволяющую свести вычисление данного интеграла к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим значением n. Например, для интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}\ \ (n \in N)$$

получена формула понижения степени

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Зная интеграл $I_1 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$, за конечное число шагов приходим к интегралу I_n (см. подробнее п.3.6). Обратимся к примерам.

<u>Пример 1</u>. $\int x^3 \ln x dx$.

Решение. Так как дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{4}x^4$ и, интегрируя по частям, находим

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C \quad (x>0).$$

<u>Пример 2</u>. $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. $\int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)d\left(x^2\right) =$

$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$

$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$. В общей сложности здесь правило интегрирования по частям пришлось применить дважды.

<u>Пример 3</u>. $\int e^{ax}\sin bx dx \quad (a \neq 0)$.

Решение. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате получается уравнение относительно неизвестного интеграла. В данном случае положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = b\cos bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и имеем:

$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$. Ещё раз проинтегрируем по частям образовавшийся справа интеграл, положив в нём $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = -b\sin bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и придём к результату:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\right) =$$

$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx$. Обозначим теперь исходный интеграл через I. Тогда имеем уравнение относительно I:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}I,$$

откуда выражаем

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I = \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right),$$

т.е. $$I = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx).$$

Окончательно, $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

<u>Пример 4</u>. $\int \arcsin x dx$.

Решение. Полагая $u = \arcsin x$, $dv = dx$ $(|x| \le 1)$, определяем $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$. Следовательно, $\int \arcsin x dx = x\arcsin x -$

$$-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right) =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

<u>Пример 5</u>. $\int x^2 \arccos x dx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $x^2 dx = dv$. Тогда

$$\int x^2\arccos x dx = \int \arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| \le 1)$:

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(x^2\right)=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$$

<u>Пример 6</u>. $\int\frac{arctgx}{x^3}dx$.

Решение. Положим $u=arctgx$, $\frac{dx}{x^3}=dv$. Тогда $u'=\frac{1}{x^2+1}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$ и $\int\frac{arctgx}{x^3}dx=\int arctgx d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=arctgx\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-$

$$-\int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=-\frac{1}{2x^2}arctgx+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-arctgx\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}arctgx\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{1}{2x}+C.$$

<u>Пример 7</u>. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$, откуда $du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$. Следовательно, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}$. Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

<u>Пример 8</u>. $\int\sqrt{x^2+k}dx$ $(k\neq 0)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{x^2+k}$, $dv=dx$. Тогда $I=\int\sqrt{x^2+k}dx=$

$$=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+I.$$

Откуда находим окончательно, выражая I:

$$\int\sqrt{x^2+k}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C.$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию (логарифмическую, показательную, обратную тригонометрическую, гиперболическую и пр.) сложного аргумента $\varphi(x)$, то часто для упрощения подынтегрального выражения бывает полезно сделать замену, приняв этот аргумент за новую переменную интегрирования.

<u>Пример 9</u>. $\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(0<t\le 1)$, тогда $x=\frac{1}{t^2}$ и $dx=-\frac{2dt}{t^3}$.

Получаем интеграл $-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}dt$. Интегрируя по частям, приняв $u=\arcsin t$, $du=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $dv=t^{-3}dt$, $v=-\frac{1}{2t^2}$, имеем

$$-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}dt=\int\arcsin t\,d\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{\arcsin t}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{\arcsin t}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\frac{\arcsin t}{t^2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}+C.$$

Таким образом, $\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}dx=x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}+C$.

<u>Пример 10</u>. $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Положим $t=-\sqrt[3]{x+1}$, тогда $x=-1-t^3$, $dx=-3t^2dt$ и $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx=-3\int e^t t^2dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$-3\left(e^t t^2 - 2\int te^t dt\right) = -3\left(e^t t^2 - 2te^t + 2e^t\right) + C = -3t^2 e^t + 6te^t -$$

$$-6e^t + C \text{, где } t = -\sqrt[3]{x+1}\,.$$

<u>*Пример 11*</u>. $\int \cos(\ln x) dx$.

Решение. Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и интеграл принимает вид $\int e^t \cos t dt$. Проинтегрируем его по частям:

$$I = \int e^t d(\sin t) = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = e^t \sin t + \int e^t d(\cos t) =$$

$= e^t \sin t + (e^t \cos t - \int e^t \cos t dt) = e^t\left(\sin t + \cos t\right) - I$. Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C, окончательно находим:

$$I = \frac{1}{2} e^t \left(\sin t + \cos t\right) + C = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C\,.$$

Можно было вычислить этот интеграл и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x), dv = dx$, тогда

$$I = \int \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) - \int \cancel{x} \cdot \left(-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) dx =$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx\,.$$

Ещё раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x \cdot \cos(\ln x) + (x \cdot \sin(\ln x) - \int \cancel{x} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$= x \cdot (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I\,,$$

откуда находим $I = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C$.

<u>*Пример 12*</u>. $\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$. *Решение*. Полагая $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и интегрируя по частям, получим

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx + \int ctgx dx = -xctgx + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = -xctgx +$$

$$+ \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln\left|\sin x\right| + C \quad \left(x \neq \pi n, n \in Z\right).$$

§ 3.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Остановимся подробнее на некоторых из наиболее изученных классов интегрируемых функций и существующих методах их интегрирования. В данном параграфе речь пойдёт об интегрировании алгебраических рациональных функций. Вначале рассмотрим некоторые из наиболее часто встречающихся типов интегралов от рациональных функций, и уже затем – общий подход к интегрированию таких дробей.

3.1. Интегралы вида $\int \dfrac{ax+b}{cx+d} dx$ $\left(ac \neq 0;\ cx+d \neq 0\right)$

Интеграл от дробно-линейной функции легко сводится к сумме двух табличных интегралов выделением в подынтегральной дроби рациональной части:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \frac{a}{c} x + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \int \frac{dx}{cx+d} =$$

$$= \frac{a}{c} x + \frac{bc-ad}{c^2} \int \frac{dx}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln\left|x + \frac{d}{c}\right| + C\,.$$

<u>*Пример*</u>. $\int \dfrac{2x+1}{3x-2} dx$.

Решение. $\int \dfrac{2x+1}{3x-2} dx = \int \dfrac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{7}{3}}{3x-2} dx = \dfrac{2}{3} \int dx + \dfrac{7}{9} \int \dfrac{d(3x-2)}{3x-2} =$

$$= \frac{2}{3} x + \frac{7}{9} \ln\left|3x-2\right| + C \quad \left(x \neq \frac{2}{3}\right).$$

3.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$

Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене интегралы данного вида приводятся к одному из двух типов табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2+A^2} = \frac{1}{A} arctg \frac{t}{A} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{t^2-A^2} = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{t-A}{t+A}\right| + C .$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-6x-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-25} = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right| + C =$

$$= \frac{1}{10} \ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right| + C .$$

3.3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ $(a \neq b)$

Наряду со способом, изложенным выше в п.3.2, для вычисления интегралов данного вида можно воспользоваться следующим очевидным тождеством: $a-b=(x+a)-(x+b)$, тогда имеем

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C .$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \cdot \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} dx =$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a).$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right),$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2}\right) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \quad (x \neq -2;1).$$

3.4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$ $(a \neq b;\ m,n \in N)$

Интегралы указанного вида берутся, в т.ч., подстановкой $t = \frac{x+a}{x+b}$. Тогда $dt = \frac{b-a}{(x+b)^2} dx$,

$$\frac{1}{x+b} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(x+b)-(x+a)}{x+b} = \frac{1}{b-a} \cdot \left(1 - \frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1-t}{b-a} .$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m \cdot (x+b)^{n+m-2}} \cdot \frac{b-a}{(x+b)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \cdot \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt .$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt . \qquad (1)$$

При $m=n=2$ интеграл вычисляется при помощи тождества

$$1 \equiv \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b} \right)^2 .$$

Имеем $\dfrac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left(\dfrac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)} \right)^2 =$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(a-b)}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) + \frac{1}{(x+a)^2} \right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| - \frac{1}{x+a} \right) +$$

$$+C = -\frac{a+b+2x}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \quad (x \neq -a, x \neq -b).$$

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

Решение. Положим $t = \dfrac{x-2}{x+3}$ и, применяя формулу (1), где $a=-2$, $b=3$, $m=2$, $n=3$, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{625}\int \frac{(1-t)^3}{t^2}dt = \frac{1}{625}\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t \right)dt =$$

$$= \frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C, \text{ где } t = \frac{x-2}{x+3} \quad (x \neq 2, x \neq -3).$$

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25}\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right)dx =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\ln|x-3| + \frac{2}{125}\ln|x+2| + C \quad (x \neq -2;3).$$

3.5. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \ (a \neq 0)$

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной знаменателя дроби: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx =$

$$= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} +$$

$$+\left(B - \frac{Ab}{2a} \right)\cdot\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)\cdot I,$$

где интеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ вычисляется способом, рассмотренным в п.3.2.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Так как $(x^2+2x+5)' = 2(x+1)$, имеем:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx =$$

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x-3}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2-4}dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2-4}dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2-4} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x-3\right)}{x^2+2x-3}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}l-\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

3.6. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$

$$\left(n\in N, n\geq 2; b^2-4c<0\right)$$

Выделением полного квадрата $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$ и заменой $z=x+\frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z=a\cdot tgu$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_n в виде комбинации I_{n-1} и $\int\frac{z^2dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}$, и вычисляя последний из интегралов интегрированием по частям, получим

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+z^2\right)-z^2}{\left(a^2+z^2\right)^n}dz=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int z\frac{zdz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int zd\left(\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)a^2}\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \qquad (1)$$

Зная интеграл $I_1=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$, по этой формуле (1) при $n=2$ получаем

$$I_2=\frac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2}I_1=\frac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{z}{a}+C. \qquad (2)$$

Полагая $n=3$ в (1), получаем

$$I_3=\frac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2=\frac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2}+\frac{3z}{8a^4\left(a^2+z^2\right)}+$$

$$+\frac{3}{8a^5}arctg\frac{z}{a}+C \qquad (3)$$

и т.д.

Таким образом можно вычислить интеграл I_n для любого натурального n.

Пример 1. $\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2\right)-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^m}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}-$

$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{\left(a^2+x^2\right)^2}=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\int xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2}-\int\frac{dx}{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right)+C=\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+C.$$

Можно было просто воспользоваться формулой (2). Наконец, можно было воспользоваться тригонометрической подстановкой $x=atgt$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$, и поэтому

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 tdt=\frac{1}{a^3}\int\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt=$$

$=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C$. Осталось сделать обратную подстановку:

$$t = arctg\frac{x}{a},\ \sin t = \sin\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$\cos t = \cos\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Поэтому искомый интеграл равен $\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3) при $a = 1$:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8}arctgx + C.$$

3.7. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$

$$\left(n \in N, n \ge 2; b^2 - 4c < 0\right)$$

Для вычисления интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$ (квадратное выражение в знаменателе дроби не имеет действительных корней) представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трёхчлена и некоторой константы, т.е.

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+b) + B - \frac{Ab}{2}}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x^2+bx+c\right)}{(x^2+bx+c)^n} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) * J_n,$$

где $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$.

Вычисление интеграла J_n рассматривалось выше в п.3.6.

Пример. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx -$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2} = -\frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)} - \frac{2x+1}{6\left(\frac{3}{4} + (x+\frac{1}{2})^2\right)} - \frac{1}{4\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.8. Метод алгебраических преобразований

Так как фундаментальный подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже в п.3.9), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных – всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов. Рассмотрим примеры таких преобразований, в которых рациональные выражения интегрируются непосредственным сведением к табличным интегралам, часто путём использования различных искусственных приёмов и иногда введения новых переменных.

Пример 1. $\int x(1-2x)^{37}dx$.

Решение. $\int\left(-\frac{1}{2}(1-2x) + \frac{1}{2}\right)(1-2x)^{37}dx = -\frac{1}{2}\int(1-2x)^{38}dx +$

$$+\frac{1}{2}\int(1-2x)^{37}dx = \frac{1}{4}\int(1-2x)^{38}d(1-2x) -$$

$$-\frac{1}{4}\int(1-2x)^{37}d(1-2x)=\frac{1}{156}(1-2x)^{39}-\frac{1}{152}(1-2x)^{38}+C.$$

Пример 2. $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.

Решение. Сделаем замену $t=1-5x^2$, откуда $x^2=\frac{1-t}{5}$, $2xdx=$ $=-\frac{1}{5}dt$ и в результате приходим к интегралу:

$$\int\left(\frac{1-t}{5}\right)t\left(-\frac{dt}{10}\right)=\frac{1}{50}\int t^{11}dt-\frac{1}{50}\int t^{10}dt=\frac{t^{12}}{600}-\frac{t^{11}}{550}+C=$$

$$=\frac{(1-5x^2)^{12}}{600}-\frac{(1-5x^2)^{11}}{550}+C.$$

Пример 3. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^{100}}$.

Решение. Выполним подстановку $t=x+2$, которая позволяет сделать так, чтобы степень суммы оказалась не в знаменателе, а в числителе дроби, что существенно удобнее для вычисления данного интеграла:

$$\int\frac{(t-2)^2dt}{t^{100}}=\int\left(\frac{t^2-4t+4}{t^{100}}\right)dt=\int\left(t^{-98}-4t^{-99}+4t^{-100}\right)dt=$$

$$=-\frac{t^{-97}}{97}+4\cdot\frac{t^{-98}}{98}-4\cdot\frac{t^{-99}}{99}+C=-\frac{1}{97(x+2)^{97}}+\frac{2}{49(x+2)^{98}}-$$

$$-\frac{4}{99(x+2)^{99}}+C\ \ (x\neq-2).$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}=\int\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\right)^2dx=$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-3)^2}+\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+2)^2}-\frac{2}{25}\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)}=$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\ln|x-3|+\frac{2}{125}\ln|x+2|+C\ \ (x\neq-2;3).$$

Пример 5. $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

Решение. Преобразуя знаменатель дроби, получим $x^4+2x^2+5=$ $=(x^2+1)^2+4$. Выполним подстановку $t=x^2+1$, тогда $xdx=\frac{dt}{2}$. Отсюда для интеграла находим

$$\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{4}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{4}arctg\frac{x^2+1}{2}+C.$$

Пример 6. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Так как $\frac{1}{x^4-1}=\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$, то имеем $\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C\ \ (x\neq\pm1)$.

Пример 7. $\int\frac{dx}{x^3(x-1)^6}$.

Решение. $I=\int\frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6}$. Положим $t=\frac{x-1}{x}$, тогда имеем

$$\int\frac{(1-t)^7}{t^6}dt=\int\frac{1-7t+21t^2-35t^3+35t^4-21t^5+7t^6-t^7}{t^6}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^6}-7\int\frac{dt}{t^5}+21\int\frac{dt}{t^4}-35\int\frac{dt}{t^3}++35\int\frac{dt}{t^2}-21\int\frac{dt}{t}+7\int dt-$$

$$-\int tdt=-\frac{1}{5t^5}+\frac{7}{4t^4}-\frac{7}{t^3}+\frac{35}{2t^2}-\frac{35}{t}-21\ln|t|+7t-\frac{t^2}{2}+C,$$

где $t=\frac{x-1}{x}$ $(x\neq0;1)$.

Пример 8. $\int \frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2} = \int \frac{x^2 dx}{x^3\left(1-x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{x^3\left(1-x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u\left(1-u\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-u}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(1-u\right)^2} + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1-x^3}\right| + C \quad (x \neq 0;1).$$

Пример 9. $\int \frac{dx}{x^3\left(x^2-2\right)}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^3\left(x^2-2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4\left(x^2-2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2\left(u-2\right)} =$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{u-2-u}{u^2\left(u-2\right)}du = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u\left(u-2\right)} =$$

$$= \frac{1}{4u} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| + C = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2}\right| + C \quad (x \neq 0;\pm\sqrt{2}).$$

Пример 10. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$. Так как $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx =$

$$= d\left(x-\frac{1}{x}\right) \text{ и } x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2,$$

то приходим к интегралу $\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$.

Пример 11. $\int \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. См. решение примера 5 из п.1.2.

Пример 12. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. См. решение примера 6 из п.1.2.

Пример 13. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx = \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1}dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1}dx =$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| +$$

$$+ C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| +$$

$$+ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C \quad \left(x \neq \pm 1\right).$$

3.9. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит, как отмечалось выше, *Г. Лейбницу* (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т.е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.

1. *Интегрирование неправильной дроби.*

Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$ (иными словами, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная), то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ вначале выделяют целую часть – многочлен $S(x)$, т.е. представляют дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Таким образом, интегрирование дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в общем случае сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

2. *Интегрирование правильной дроби.*

Рассмотрим интегрирование правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в которой степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Оно основано на представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей.

1) Первое, что необходимо сделать, – это выписать разложение дроби в сумму элементарных дробей. Вид этого разложения зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Известно, что алгебраический многочлен любой степени раскладывается на сомножители линейного $(x-a)$ и (или) квадратичного вида x^2+bx+c. Предположим, в разложении $Q(x)$ на множители присутствует сомножитель линейного вида в n-й степени: $(x-a)^n$ (a – действительный корень многочлена кратности n). Тогда ему будет соответствовать сумма ровно n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad (1)$$

где A_k, $k=1,2,\ldots,n$, – некоторые постоянные. Если сомножителей линейного типа в разложении многочлена $Q(x)$ несколько, то каждому из них соответствует аналогичная сумма.

Каждому сомножителю квадратичного вида в m-й степени $(x^2+bx+c)^m$, где трёхчлен x^2+bx+c не имеет действительных корней, соответствуют, в свою очередь, m простейших дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+bx+c)^m}, \qquad (2)$$

где M_i, N_i, $i=1,2,\ldots,m$, – постоянные.

Таким образом, выписывается представление дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде конечной суммы элементарных дробей вида (1) и (2):

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+bx+c)^m}. \qquad (3)$$

2) Далее *методом неопределённых коэффициентов* находятся постоянные $A_k, M_i, N_i, \ldots$ ($k=1,2,\ldots,n$; $i=1,2,\ldots,m$;…). Для этого все простейшие дроби в правой части равенства (3) приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x зависят от неизвестных $A_k, M_i, N_i, \ldots$. Поскольку две рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т.е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределённых коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение) и, таким образом, неопределённые ранее коэффициенты оказываются найденными.

3) После этого найденные значения коэффициентов $A_k, M_i, N_i,\ldots$ подставляются в разложение (3), и интегрирование рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ оказывается в результате сведено к интегрированию суммы элементарных дробей (3). Осталось рассмотреть завершение процедуры интегрирования.

Итак, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию дробей вида:

$$\text{А)}\,\frac{A}{x-a};\quad \text{Б)}\,\frac{A}{(x-a)^n}\ (n\ge 2, n\in N);\quad \text{В)}\,\frac{Mx+N}{x^2+bx+c};$$

$$\text{Г)}\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^m}\ (m\ge 2, m\in N).$$

Вычисление интегралов от указанных дробей осуществляется следующим образом:

$$\text{А)}\ \int\frac{A}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+C;$$

$$\text{Б)}\ \int\frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C\ \ (n\ge 2, n\in N);$$

$$\text{В)}\ \int\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \int\frac{\frac{M}{2}(2x+b)+N-\frac{Mb}{2}}{x^2+bx+c}dx =$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+bx+c\right)}{x^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} =$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right|+\frac{(N-Mb/2)}{\sqrt{c-b^2/4}}\cdot arctg\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-b^2/4}}+C$$

(так как x^2+bx+c не имеет действительных корней, то $c-\dfrac{b^2}{4}>0$).

Г) Вычисление интегралов вида

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^m}dx\ (m\ge 2, m\in N)$$

было рассмотрено в п.3.7.

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение дроби $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (5)$$

Приводя дроби в правой части (5) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1). \qquad (6)$$

Приведём многочлен в правой части к стандартному виду, упорядочив степени x в порядке убывания:

$$x=(A+B)x^2+(C-B-4A)x+(4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными A,B,C:

$$\begin{cases}A+B=0\\ C-B-4A=1\\ 4A-2B+C=0,\end{cases}$$

решая которую находим неопределённые коэффициенты $A=-\dfrac{1}{9}$, $B=\dfrac{1}{9}$, $C=\dfrac{2}{3}$. Наконец, подставим найденные коэффициенты в разложение (5) и проинтегрируем, разбивая интеграл на сумму трёх табличных интегралов:

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}=-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+C,\ x\ne -1, x\ne 2.$$

Иногда полезно в равенство, полученное приравниванием многочлена $P(x)$ к числителю $T(x)$ дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простейших дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно это действительные корни знаменателя $Q(x)$ данных дробей). В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим данный приём к предыдущему примеру. Для этого, не приводя многочлен в правой части этого тождества (6) к стандартному виду, положим в нём последовательно вначале $x=2$, и найдём при этом $2=3C$, откуда $C=\dfrac{2}{3}$. Затем положим $x=-1$, получив, что $-1=9A$, а значит $A=-\dfrac{1}{9}$. Наконец, положим в (5) $x=0$ (не корень многочлена $Q(x)$, но тоже достаточно удобное для подстановки число). В результате имеем $0=4A-2B+C$, откуда с учётом найденных ранее $A=-\dfrac{1}{9}$ и $C=\dfrac{2}{3}$ определяем $B=\dfrac{4A+C}{2}=\dfrac{1}{9}$. И далее интегрируем по описанной выше схеме.

<u>Пример 2</u>. $\displaystyle\int\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$.

Решение. Разложение дроби $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A,B,C,D,E определим, исходя из тождества

$$3x^2-x+2=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}A+B=0\\ -B+C=0\\ 2A-C+D+B=3\\ C-B+E-D=-1\\ A-C-E=2.\end{cases}$$

Полагая $x=1$, находим $A=1$. Решая систему с учётом $A=1$, определяем остальные коэффициенты: $B=-1,C=-1,D=1,E=0$. Следовательно,

$$\int\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-arctgx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+C\quad(x\neq1).$$

<u>Пример 3</u>. $\displaystyle\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение. Выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l}
_\,x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x} & x+3 \\
_\,3x^2+3x+7 & \\
\underline{3x^2+6} & \\
3x+1. &
\end{array}$$

Таким образом, $\dfrac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2}$. Подставляя полученное представление под знак интеграла, вычисляем интеграл:

$$\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx=\int(x+3)dx+\int\frac{(3x+1)}{x^2+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

<u>Пример 4</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Разложим многочлен в знаменателе на множители:

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$

$$=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right),$$

а затем представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Используя метод неопределённых коэффициентов, найдём $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $D=\frac{1}{2}$. Задача оказалась сведена к вычислению интеграла

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\left(x\sqrt{2}+1\right)+arctg\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)+C.$$

<u>*Пример 5*</u>. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{\left(x^4+1\right)+\left(x^4-1\right)}{2\left(x^6+1\right)}=\frac{\left(x^4+1\right)}{2\left(x^6+1\right)}-\frac{\left(x^4-1\right)}{2\left(x^6+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(x^4-x^2+1\right)+x^2}{2\left(x^6+1\right)}+\frac{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}{2\left(x^6+1\right)}=\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{x^2}{2\left(x^6+1\right)}+$$

$+\frac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}$. Интегралы от первых двух слагаемых равны, соответственно, $\frac{1}{2}arctgx+C_1$ и $\frac{1}{6}arctg\left(x^3\right)+C_2$.

Вычислим интеграл от третьего слагаемого. Для этого, учитывая, что

$$x^4-x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(\sqrt{3}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right),$$

разложим дробь на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}=(Ax+B)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right),$$

откуда
$$\begin{aligned}
x^3&: \quad 0=A+C,\\
x^2&: \quad -\frac{1}{2}=-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D,\\
x^1&: \quad 0=A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D,\\
x^0&: \quad \frac{1}{2}=B+D.
\end{aligned}$$

Решая систему, находим $A=-C=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $B=D=\frac{1}{4}$.

Подставляя в разложение, получим

$$\frac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Интегрируя, приходим к окончательному ответу:

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{6}arctg\left(x^3\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C.$$

3.10. Метод М. В. Остроградского

Ещё один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, носит название *метода Остроградского*. Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.

> ***Остроградский*** *Михаил Васильевич* (1801–1861) – русский математик, член Петербургской АН, один из основателей Петербургской математической школы. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике.

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплексные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределённых коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет. Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$. То есть каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально он имел кратность n $(n\in N)$, войдёт с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n-1)$ в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введём в рассмотрение ещё два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределёнными коэффициентами, причём их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \qquad (1)$$

Чтобы с её помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \qquad (2)$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределённые коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (1). Обратимся к примерам.

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$. Находим, что $Q_2(x)=(x-1)(x+1)$ и тогда $Q_1(x)=\frac{Q(x)}{Q_2(x)}=(x-1)(x+1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ – квадратный трёхчлен, записанный в общем виде: $P_1(x)=ax^2+bx+c$. Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ – многочлен первой степени $P_2(x)=\delta x+e$. Следовательно, имеем пять неопределённых коэффициентов a, b, c, δ, e. Формула Остроградского примет вид

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}+\int\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}\right)'+\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2-(ax^2+bx+c)\left((x+1)^2+2(x-1)(x+1)\right)}{(x-1)^2(x+1)^4}+$$

$+\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}$. Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим: $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Итак, при всех $x \neq \pm 1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x \equiv (2ax+b)(x^2-1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x^2-1)(x+1).$$

Найдём коэффициенты a, b, c, δ, e методом неопределённых коэффициентов (сняв временно ограничения $x \neq \pm 1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{aligned}
x^4 &: \quad 0=\delta \\
x^3 &: \quad 0=-a+\delta+e \\
x^2 &: \quad 0=-2b+a+e-\delta \\
x^1 &: \quad 1=-2a-3c+b-e-\delta \\
x^0 &: \quad 0=-b+c-e
\end{aligned}$$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим

$$a=-\frac{1}{8},\ b=-\frac{1}{8},\ c=-\frac{1}{4},\ \delta=0,\ e=-\frac{1}{8}.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Осталось вычислить интеграл

$$\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\quad(x\neq\pm1).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$. *Решение*. Согласно формуле Остроградского,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}+D\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1\equiv -Ax^4-2Bx^3-3Cx^2+2Ax+B+D(x^5-x^4+x^3+x^2-x+1)+$$

$$+(Ex+F)(x^4+x^3+x+1),$$

откуда

$$\begin{aligned}
x^5 &: \quad 0=D+E, \\
x^4 &: \quad 0=-A-D+E+F, \\
x^3 &: \quad 0=-2B+D+F, \\
x^2 &: \quad 0=-3C+D+E, \\
x^1 &: \quad 0=2A-D+E+F, \\
x^0 &: \quad 1=B+D+F.
\end{aligned}$$

Решая систему, находим $A=C=0$, $B=\frac{1}{3}$, $D=-E=\frac{2}{9}$, $F=\frac{4}{9}$. Итак,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{2}{9}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\quad(x\neq-1).$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

Решение. Поскольку $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, то разложение, согласно формуле Остроградского, ищем в виде

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\int\frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx,$$

откуда, дифференцируя равенство и приводя дроби к общему знаменателю, получаем тождество

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(x^2+x+1)(Cx+D).$$

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 0=C, \\
x^2 &: \quad 0=-A+D+C, \\
x^1 &: \quad 0=D-2B+C, \\
x^0 &: \quad 1=A-B+D,
\end{aligned}$$

откуда $A=D=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$.

Подставляя в формулу Остроградского, окончательно получаем

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{1-2x}{4x-3}dx$. Ответ: $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\ln|4x-3|+C \left(x\neq\frac{3}{4}\right)$.

2. $\int \frac{2x+3}{3x+2}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|+C \left(x\neq-\frac{2}{3}\right)$.

3. $\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C \left(x\neq-\frac{1}{3};-1\right)$.

4. $\int \frac{dx}{15-2x-x^2}$. Ответ: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|+C \left(x\neq-5;3\right)$.

5. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$. Ответ: $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C \left(x\neq-3;-2\right)$.

6. $\int \frac{(x+3)dx}{(x+2)(x-1)}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-1)^4}{x+2}\right|+C \left(x\neq-2;1\right)$.

7. $\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}$. Ответ: $\ln\sqrt[5]{(x-1)^2(x+4)^8}+C \left(x\neq-4;1\right)$.

8. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$. Ответ: $\frac{1}{10}\ln\left(5x^2+2x+1\right)+\frac{2}{5}arctg\frac{5x+1}{2}+C$.

9. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$. Ответ: $\frac{5}{2}\ln\left(x^2+10x+29\right)-11arctg\frac{x+5}{2}+C$.

10. $\int (x-1)^{10}dx$. Ответ: $\frac{(x-1)^{11}}{11}+C$.

11. $\int \frac{dx}{(1-3x)^{30}}$. Ответ: $\frac{1}{87}(1-3x)^{-29}+C \left(x\neq\frac{1}{3}\right)$.

12. $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{100}}$.

Ответ: $-\frac{1}{99(x-1)^{99}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{96(x-1)^{96}}+C \left(x\neq1\right)$.

13. $\int (2x+3)^2(1-x)^8dx$.

Ответ: $-\frac{4}{11}(1-x)^{11}+2(1-x)^{10}-\frac{25}{9}(1-x)^9+C$.

14. $\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$. Ответ: $\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\ln|1+x|+C \left(x\neq-1\right)$.

15. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. Ответ: $-\frac{1}{x}-\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{3}{2}arctgx+C \left(x\neq0\right)$.

16. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$ Ответ: $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C \left(x\neq-3;1\right)$.

17. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}$. Ответ: $\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C \left(x\neq-2;-1\right)$.

18. $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$. Ответ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \left(x\neq0;1\right)$.

19. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$. Ответ: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}arctg\left(x^2\right)+C \left(x\neq\pm1\right)$.

20. $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$. Ответ: $\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$.

21. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$. Ответ: $\frac{1}{x^2+2x+2}+arctg(x+1)+C$.

22. $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx$.

Ответ: $-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}-\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}+C$.

23. $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}dx$. Ответ: $\frac{x-7}{8(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}arctg\frac{x+1}{2}+C$.

24. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$. Ответ: $\frac{x}{8(x^2+2)^2}+\frac{3x}{32(x^2+2)}+\frac{3\sqrt{2}}{64}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

25. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$. Ответ: $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\right.$

$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\left(x\sqrt{2}+1\right)+arctg\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)\right)+C$.

26. $\int \frac{x^2+1}{x^6+1}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}arctgx^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{12}\ln\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4-x^2+1}+C$

27. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$. Ответ: $arctgx+\frac{1}{3}arctg\left(x^3\right)+C$.

28. $\int \frac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}dx$. Ответ: $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln\left(1+x^7\right)^2+C\ \ (x\neq 0;-1)$.

29. $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$. Ответ: $\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right|+C\ \ (x\neq -2;0;1)$.

30. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|+C\ \ (x\neq -2;-1;1;2)$.

31. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$. Ответ: $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C\ \ (x\neq 1;2;4)$.

32. $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$. Ответ: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C\ \left(x\neq -\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

33. $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$.

Ответ: $\frac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C\ \ (x\neq -3;-2;-1)$.

34. $\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2\left(x^2+2\right)}dx$.

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{3}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C\ \ (x\neq -1)$.

35. $\int \frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}dx$. Ответ: $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{3x+1}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{3}{2}arctgx+C$.

36. $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Ответ: $\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C$, $x\neq \pm 2$

§ 4.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе *рационализирующих подстановок*, т.е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Назовём этот подход методом рационализации подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

4.1. Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей

4.1.1. ***Интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Здесь под $R(x,y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т.е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n,m: $R(x,y)=\dfrac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$. При этом многочленом степени n с двумя переменными x и y называется выражение вида

$$P_n(x,y)=a_{n0}x^n+a_{0n}y^n+a_{(n-1)1}x^{n-1}y+a_{1(n-1)}xy^{n-1}+\ldots$$

$$\ldots+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}=\sum_{0\le i+j\le n}a_{ij}x^iy^j,$$

$i,j=0,1,2\ldots,n$, где суммарная степень $i+j$ каждого одночлена неотрицательна и не превышает n, причём среди коэффициентов $a_{n0},a_{(n-1)1},a_{(n-2)2},\ldots a_{0n}$ есть хотя бы один, отличный от нуля.

Дробно-линейной иррациональностью назовём функцию вида

$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $n\in N,n>1$, $a,b,c,d\in R$ – постоянные, $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$. В случае $c=0$, $a\neq 0$ получим, в частности, линейную иррациональность $R\left(x,\sqrt[n]{Ax+B}\right)$, где $A=\dfrac{a}{d}$, $B=\dfrac{b}{d}$.

1. Рационализация *линейных иррациональностей* вида $R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)$, где a и b – постоянные ($a\neq 0,n\in N,n>1$), осуществляется с помощью подстановки $t=\sqrt[n]{ax+b}$. Возводя обе части этого равенства в степень n, получим $t^n=ax+b$, откуда $x=\dfrac{t^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$. Переходя в выражении R от переменной x к переменной t, получим рациональное выражение $R\left(\dfrac{t^n-b}{a},t\right)$.

2. Аналогичным образом рационализируются выражения $R\left(x^m,\sqrt[n]{ax^m+b}\right)$, где $m,n\in N$, $m>1,n>1$. При этом используется подстановка $t=\sqrt[n]{ax^m+b}$.

3. Рационализация *дробно-линейных иррациональностей* осуществляется с помощью подстановки $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда $t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}$, $dx=\dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}dt.$$

Пример 1. $\int\dfrac{\sqrt{x+9}}{x}dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеется линейная иррациональность $\sqrt{ax+b}=\sqrt{x+9}$, поэтому положим $t=\sqrt{x+9}$, тогда $x=t^2-9$, $dx=2tdt$ и имеем: $\int\dfrac{\sqrt{x+9}}{x}dx=2\cdot\int\dfrac{t^2dt}{t^2-9}=2\cdot\int\dfrac{\left(t^2-9\right)+9dt}{t^2-9}=$

$$=2\int dt+18\cdot\int\frac{dt}{t^2-9}=2t+3\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=2\sqrt{x+9}+$$

$$+3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C, \text{ где } x\ge -9, x\ne 0.$$

Пример 2. $\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$.

Решение. Под знаком интеграла видим дробно-линейную иррациональность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$; согласно рекомендации применим подстановку $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тогда $x=\frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}=-\frac{3}{4}\cdot\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8t^2}+C=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$$

$(x\ne\pm 2)$.

4.1.2. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$$

Интегралы указанного вида, где R – рациональная функция своих аргументов, показатели степеней $\frac{p_i}{q_i}$ $(p_i\in Z, q_i\in N)$, $i=1,2,\ldots,k$, – несократимые дроби, находятся с помощью рационализирующей подстановки

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ где } n=НОК(q_1,q_2,\ldots,q_k).$$

Тогда найдутся такие натуральные $l_1,l_2,\ldots,l_k$, что

$\begin{cases} q_1\cdot l_1=n\\ q_2\cdot l_2=n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_k\cdot l_k=n\end{cases}$. Выражаем $x=-\frac{t^nd-b}{t^nc-a}$, $dx=\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}dt$ и в результате приходим к следующему интегралу от рациональной функции:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(-\frac{t^nd-b}{t^nc-a},t^{p_1l_1},t^{p_2l_2},\ldots,t^{p_kl_k}\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}dt.$$

Пример 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. Интеграл является интегралом рассматриваемого типа, где $a=d=1$, $b=c=0$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{3}$. Общий знаменатель этих дробей равен 6, поэтому применяем подстановку $t=\sqrt[6]{x}$, в результате освобождаясь от обоих радикалов. С помощью этой рационализирующей подстановки интеграл от иррациональной функции оказывается сведённым к интегралу от рациональной функции. Имеем $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=$$

$$=6\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}=6\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=6(t-arctgt)+C=$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C\ (x>0).$$

Пример 2. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Решение. Этот интеграл также относится к интегралам указанного вида, причём $a=d=1$, $b=c=0$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{3}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{6}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{3}$. Общий знаменатель всех дробей равен 6, поэтому, аналогично предыдущему примеру, применяем подстановку $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$. Следовательно, $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=$

$$=6\cdot\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\cdot\int\frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{1+t^2}dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\tfrac{3}{2}t^4+6arctg(t)+C=\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+6\cdot arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C\ (x>0).$$

4.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим основные приёмы вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей, т.е. интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a,b,c – некоторые постоянные, $a\neq 0$. При этом будем дополнительно считать, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет кратного корня, т.е. не представим в виде $a\left(x-x_1\right)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным. Обратимся вначале к некоторым важным частным случаям.

4.2.1. *Интегралы вида* $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt \quad \text{или} \quad \int\sqrt{t^2+A}dt.$$

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx=\int\sqrt{a(x^2+\frac{b}{a}x)+c}\cdot dx=$$

$$=\int\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}\cdot dx.$$

Далее, если $a>0$, то подстановкой $t=x+\frac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду

$\int\sqrt{t^2+A}dt$ (с точностью до коэффициента); если же $a<0$ и $c-\frac{b^2}{4a}>0$, аналогичной подстановкой получаем интеграл вида $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$. Вычислим эти интегралы.

1. $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$. Положим $u=\sqrt{A^2-t^2}, dv=dt$, откуда $du=-\frac{tdt}{\sqrt{A^2-t^2}}$, $v=t$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{A^2-t^2}}=t\sqrt{A^2-t^2}-$$

$$-\int\frac{A^2-t^2-A^2}{\sqrt{A^2-t^2}}dt=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\sqrt{A^2-t^2}dt+A^2\arcsin\frac{t}{A}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{A^2-t^2}+\frac{A^2}{2}\arcsin\frac{t}{A}+C\ \left(|t|\leq A\right).$$

2. $\int\sqrt{t^2+A}dt$. Положим $u=\sqrt{t^2+A}, dv=dt$.

Интегрируя по частям, получаем

$$I=\int\sqrt{t^2+A}dt=t\sqrt{t^2+A}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+A}}=t\sqrt{t^2+A}-$$

$$-\int\frac{t^2+A-A}{\sqrt{t^2+A}}dt=t\sqrt{t^2+A}+A\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+I.$$

Отсюда находим окончательно, выражая I:

$$\int\sqrt{t^2+A}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+C\ \left(t^2+A\geq 0\right).$$

Другие способы вычисления интегралов $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$ и $\int\sqrt{t^2+A}dt$ рассматриваются в п.4.2.11-п.4.2.13.

<ins>*Замечание*</ins>. Если в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c выделить полный квадрат $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$ и положить

$t=\sqrt{\left|\frac{a}{c-b^2/(4a)}\right|}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, то интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ приводится к одному из следующих трёх видов:

$$\int R_1\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)dt,\ \int R_2\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)dt,\ \int R_3\left(t,\sqrt{1+t^2}\right)dt.$$

Пример 1. $\int\sqrt{x^2+8x+25}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{x^2+8x+25}dx=\int\sqrt{\left(x^2+8x+16\right)+9}dx=\int\sqrt{(x+4)^2+9}dx=$$

$$=\int\sqrt{(x+4)^2+9}d(x+4)=\frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25}+$$

$$+\frac{9}{2}\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}\right|+C.$$

Пример 2. $\int\sqrt{-x^2+2x+8}dx$.

Решение. $\int\sqrt{-x^2+2x+8}dx=\int\sqrt{-\left(x^2-2x\right)+8}dx=$

$$=\int\sqrt{-\left((x-1)^2-1\right)+8}dx=\int\sqrt{9-(x-1)^2}dx=$$

$$=\frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+8}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}+C\quad(x\in[-2,4]).$$

4.2.2. *Интегралы вида* $\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы данного вида вычисляются выделением в выражении $Ax+B$ производной $2ax+b$ от подкоренного выражения с последующим разбиением в сумму двух табличных интегралов:

$$\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\int\left(\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\right)\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}d\left(ax^2+bx+c\right)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$=\frac{A}{3a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I$, где интеграл I после выделения

под корнем полного квадрата и замены $t=x+\frac{b}{2a}$ сводится к одному из следующих интегралов (см. п.4.2.1):

$$\int\sqrt{t^2+k}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|+C$$

или

$$\int\sqrt{k^2-t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{k^2-t^2}+\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{t}{k}+C.$$

Пример. $\int(2x+7)\sqrt{x^2+x+1}dx$.

Решение. $\int((2x+1)+6)\sqrt{x^2+x+1}dx=\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}dx+$

$$+6\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\sqrt{x^2+x+1}d\left(x^2+x+1\right)+$$

$$+6\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3}+$$

$$+6\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3}+3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

4.2.3. *Интегралы вида* $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида путём выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена ax^2+bx+c под знаком радикала приводятся к табличным интегралам

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{A}+C\ \text{ или }\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C.$$

Пример 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем интеграл к виду

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x-2/3)}{\sqrt{1/9-(x-2/3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-2/3}{1/3}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C\quad\left(x\in\left(\frac{1}{3},1\right)\right).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем квадратный трёхчлен к виду $(x+1)^2+4$. В результате приходим к интегралу

$$\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

4.2.4. *Интегралы вида* $\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида чаще всего вычисляются выделением в числителе дроби производной от подкоренного выражения:

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\cdot\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-$$

$$-13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1/2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C,$$

где $x\notin\left[-2-\frac{\sqrt{14}}{2},-2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right]$.

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=\int\frac{-3/2\cdot(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx+13\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C\quad(x\in(2,4)).$$

4.2.5. *Интегралы вида* $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ – алгебраический многочлен n-й степени, находятся с помощью тождества

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad(1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени с неопределёнными коэффициентами, λ – ещё один неопределённый коэффициент. Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x)=Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+\lambda,$$

из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

<u>*Пример*</u>. $\int\frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} +$$

$+ \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$, откуда, умножая на $2\sqrt{x^2+x+1}$, получим

$$2(x^3-2) = (4ax+2b)(x^2+x+1) + (ax^2+bx+c)(2x+1) + 2\lambda.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c и λ имеем систему

уравнений $\begin{cases} 2 = 4a+2a \\ 0 = 4a+2b+a+2b \\ 0 = 4a+2b+b+2c \\ -4 = 2b+c+2\lambda \end{cases}$, откуда определяем $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{5}{12}$,

$c = -\dfrac{1}{24}$, $\lambda = -\dfrac{25}{16}$. Следовательно, $\displaystyle\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

4.2.6. *Интегралы вида* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n \in N)$

Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n=1)$ берутся с помощью подстановки $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$. В результате они приводятся к интегралам типа $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ также вычисля-

ются с помощью замены $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$. Тогда $x = \dfrac{1}{t} + \alpha$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$,

$ax^2+bx+c = \dfrac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2 + (2a\alpha+b)t + a}{t^2}$ и получаем, что

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2 + (2a\alpha+b)t + a}}$$

(т.е. интеграл сводится к интегралу предыдущего типа п.4.2.5).

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение. Положим $t = \dfrac{1}{x}$, тогда $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и, подставляя в интеграл, получим (при $t > 0$, см. замечание в п.4.2.13):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2} - \frac{2}{t} + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} =$$

$$= -\ln\left|t - 1 + \sqrt{t^2-2t+5}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1 - x + \sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C \quad (x > 0).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Решение. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3 \cdot I_1 + I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов I_1 и I_2.

$$I_1=\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+C_1;$$

в интеграле I_2 положим $t=\dfrac{1}{x+1}$ $(t>0)$:

$$I_2=\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=$$

$$=\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_2.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+$$

$$+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C\quad(x+1>0).$$

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Решение. Положим $t=\dfrac{1}{x-1}$, тогда $x=1+\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$ и в результате перехода к новой переменной приходим при $t>0$ к интегралу $I=-\displaystyle\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Далее воспользуемся формулой (1):

$$\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=A\sqrt{5t^2+5t+1}+\frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Умножим полученное тождество на $2\cdot\sqrt{5t^2+5t+1}$:

$$2t^2=t^2(20A)+t(15A+10B)+(2A+5B+2\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases}2=20A\\0=15A+10B\\0=2A+5B+2\lambda,\end{cases}$$

откуда находим $A=\dfrac{1}{10}$, $B=-\dfrac{3}{20}$, $\lambda=\dfrac{11}{40}$. Далее,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\int\frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2-1/20}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

Окончательно имеем

$$I=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{10}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt5}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C,$$

где $t=\dfrac{1}{x-1}$, или $I=\dfrac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-$

$$-\frac{11}{40\sqrt5}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt5+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C\quad(x>1).$$

4.2.7. *Интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}}$ $(n\in Z)$

Интегралы этого типа при $bc\neq0$ вычисляются подстановкой $t=\left(\sqrt{bx^2+c}\right)'=\dfrac{bx}{\sqrt{bx^2+c}}$. Тогда $x^2=\dfrac{ct^2}{b(b-t^2)}$, $xdx=\dfrac{ctdt}{(t^2-b)^2}$ и, умножая и деля подынтегральную дробь на bx^2, получим

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}}=\frac{1}{b}\int\frac{1}{x^2(x^2+a)^n}\left(\frac{bx}{\sqrt{bx^2+c}}\right)xdx=$$

$$=\frac{1}{b}\int\frac{1}{\left(\frac{ct^2}{b(b-t^2)}\right)\left(\frac{ct^2}{b(b-t^2)}+a\right)^n}\cdot t\cdot\frac{ctdt}{(t^2-b)^2}.$$

<u>*Пример*</u>. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \left(\sqrt{x^2+2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, тогда $x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2}$,

$x^2+1 = \frac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$. Для удобства преобразований умножим и разделим подынтегральное выражение на x^2:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{x\cdot xdx}{\sqrt{x^2+2}\cdot x^2\cdot (x^2+1)} = \int \frac{t\cdot \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

4.2.8. *Интегралы вида* $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}}$ $(n\in Z)$

Интегралы данного вида при $bc \neq 0$ рационализируются подстановкой $t = \sqrt{bx^2+c}$. Тогда $x^2 = \frac{t^2-c}{b}$, $xdx = \frac{tdt}{b}$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}} = \frac{1}{b}\int \frac{tdt}{\left(\frac{t^2-c}{b}+a\right)^n\cdot t}.$$

<u>*Пример*</u>. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2+2}$, тогда $x^2 = t^2-2$, $xdx = tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C.$$

4.2.9. *Интегралы вида* $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in N)$

Здесь считается, что $p^2-4q<0$, т.е квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Предположим вначале, что $ax^2+bx+c = a(x^2+px+q)$. Тогда

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(A_1x+B_1)dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Поскольку $A_1x+B_1 = \frac{A_1}{2}(2x+p)+B_1-\frac{A_1p}{2}$, то

$$\int \frac{(A_1x+B_1)dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} = C_1\cdot\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} + D_1\cdot\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Первый из полученных интегралов табличный. Для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

применяется подстановка Абеля: $t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

В общем случае, когда отношение трёхчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно, в интеграле

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

делают замену переменной интегрирования так, чтобы во вновь полученных трёхчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, если $p \neq \frac{b}{a}$, и $x = t-\frac{p}{2}$, если $p = \frac{b}{a}$.

В результате получаем интеграл

$$\int \frac{Mt+N}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\delta t^2+r}}dt, \qquad (2)$$

для вычисления которого представим его в виде суммы

$$\int \frac{Mtdt}{\left(t^2+\lambda\right)^n\sqrt{\delta t^2+r}}+N\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+\lambda\right)^n\sqrt{\delta t^2+r}}.$$

К первому из этих интегралов применяем подстановку $u=\sqrt{\delta t^2+r}$, а ко второму – подстановку $v=\left(\sqrt{\delta t_2+r}\right)'$ (см. п.4.2.7–п.4.2.8).

<u>*Пример 1*</u>. $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение. <u>1-й способ</u>. Выделяя полный квадрат, перепишем интеграл в виде $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}=$

$=\int\frac{dx}{\frac{5\sqrt5}{8}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt5}\right)^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt5}\right)^2-1}}$. Положим $t=\frac{2x+1}{\sqrt5}$, тогда $\sqrt5 dt=2dx$ и, значит, приходим к интегралу $\frac{4}{5}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}$. Положим теперь $t=\frac{1}{\sin u}$, откуда $\frac{1}{t}=\sin u$, $-\frac{dt}{t^2}=\cos u du$. Поэтому

$$\frac{4}{5}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}=-\frac{4}{5}\int\frac{\cos u\sin u du}{\left(1+\frac{3}{5}\sin^2 u\right)\cos u}=-\frac{4}{5}\int\frac{\sin u du}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cos^2 u}=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{d(\cos u)}{\frac{8}{3}-\cos^2 u}=\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt8+\sqrt3\cos u}{\sqrt8-\sqrt3\cos u}\right|+C,\text{ где } u=\arcsin\frac{\sqrt5}{2x+1}.$$

Окончательно получим при $x\notin\left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt5\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt5-1\right)\right]$:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}=\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt2+\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}{(2x+1)\sqrt2-\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}\right|+C.$$

<u>2-й способ</u>. Вычислим этот же интеграл без применения тригонометрических подстановок. Полагая $y=x+\frac{1}{2}$, сразу приходим к интегралу (см. п.4.2.7) $\int\frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}$, который рационализируется подстановкой

$$t=\left(\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}\right)'=\frac{y}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}\text{ откуда }\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Подставляя в интеграл, имеем

$$\int\frac{dt}{\frac{3}{4}-2t^2}=\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt3+\sqrt8 t}{\sqrt3-\sqrt8 t}\right|+C,\text{ где } t=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}},$$

и окончательно получаем при $x\notin\left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt5\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt5-1\right)\right]$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}=\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt2+\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}{(2x+1)\sqrt2-\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}\right|+C.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+x+2\right)^5}}$.

Решение. Это интеграл вида (1), воспользуемся для его вычисления подстановкой Абеля, положив $t=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. Тогда

$$4t^2\left(x^2+x+2\right)=4x^2+4x+1=4\left(x^2+x+2\right)-7,$$

откуда $x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}$. Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2+x+2}=$ $=x+\frac{1}{2}$ с использованием в его левой части правила $d(uv)=vdu+udv$, имеем $d\left(t\sqrt{x^2+x+2}\right)=d\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

$$\sqrt{x^2+x+2}\cdot dt + t\cdot\frac{(2x+1)dx}{2\sqrt{x^2+x+2}} = dx\,,$$

$$\sqrt{x^2+x+2}\cdot dt + t^2 dx = dx\,,$$

откуда получаем требуемое соотношение, связывающее дифференциалы «старой» и «новой» переменных интегрирования:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{dt}{1-t^2}\,.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}\,(x^2+x+2)^2} =$$

$$= \int\frac{(4t^2-4)^2}{49}\cdot\frac{dt}{1-t^2} = \frac{16}{49}\int(1-t^2)dt = \frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= \frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)+C\,.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\displaystyle\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Это интеграл вида (2). Разобьём его на два интеграла

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} + \int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = I_1 + I_2\,.$$

Положив в первом из интегралов $u = x^2$, а затем $z=\sqrt{u+2}$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}} = \int\frac{dz}{(z^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C\,.$$

Для вычисления второго интеграла положим $t=\left(\sqrt{x^2+2}\right)' =$ $= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ Тогда $x^2 = \dfrac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2+1 = \dfrac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx = \dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ и, подставляя в интеграл, получим

$$I_2 = \int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{2x(xdx)}{x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{2t\cdot\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2}} =$$

$$= \int\frac{2dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C\,.$$

Окончательно,

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + 2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C\,.$$

<u>*Замечание*</u>. Интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ на промежутке $x>0$ $(x<0)$ заменой $u=\dfrac{1}{x^2}$ приводится к виду $\displaystyle\int\frac{-du}{(u+1)\sqrt{1+2u}}$.

<u>*Пример 4*</u>. $\displaystyle\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Так как отношение трёхчленов x^2-x+1 и x^2+1 не является константой, то приведём этот интеграл к виду (2) дробно-линейной подстановкой $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Найдём коэффициенты α и β. Имеем

$$x^2-x+1 = \frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{(t+1)^2}\,.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем соотношением между α и β:

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0\,.$$

Поскольку

$$x^2+1 = \frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2}\,,$$

то, приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем ещё одно соотношением между α и β:

$$2\alpha\beta+2=0\,.$$

Решая систему $\begin{cases} 2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0 \\ 2\alpha\beta+2=0 \end{cases}$, находим $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \end{cases}$. Следовательно, в данном интеграле надо делать замену $x=\dfrac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}, \qquad x^2+1=\frac{2t^2+2}{(t+1)^2}, \qquad 11x-13=-\frac{2t+24}{t+1},$$

$dx=\dfrac{2dt}{(t+1)^2}$, и, подставляя в интеграл, получаем его в виде (2)

$$\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=-2\sqrt{2}\int\frac{(t+12)dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}.$$

Далее, имеем

$$\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{d\left(\sqrt{t^2+1}\right)}{t^2+3}=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}+C.$$

Для вычисления интеграла $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$ сделаем подстановку $z=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'$. Имеем $\dfrac{dz}{1-z^2}=\dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$,

$$t^2+3=\frac{3-2z^2}{1-z^2} \text{ и тогда } \int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\int\frac{dz}{3-2z^2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C.$$

Окончательно,

$$\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=-2arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-$$

$$-4\sqrt{3}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C, \text{ где } t=\frac{x+1}{1-x}.$$

4.2.10. *Интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Здесь $R(x)=\dfrac{T_k(x)}{Q_m(x)}$ – рациональная функция, $T_k(x)$ и $Q_m(x)$ – целые алгебраические многочлены соответственно степеней k и m. Выделяя при $k\ge m$ из рациональной дроби $R(x)$ целую часть – многочлен $S(x)$:

$$R(x)=S_{k-m}(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ n<m,$$

и раскладывая полученную правильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей, получаем, что интегрирование функций $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению рассмотренных выше интегралов трёх типов:

А) $\displaystyle\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

Б) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

С) $\displaystyle\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

где квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$. *Решение*. См. пример 3 из п.4.2.9.

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Выделяя из дроби $\dfrac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}$ целую часть, имеем

$$\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}=x+1+\frac{3x-8}{x^3+1}.$$

Разложим дробь $\dfrac{3x-8}{x^3+1}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{3x-8}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда $3x-8=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. Полагая в этом равенстве $x=-1$, находим $A=-\dfrac{11}{3}$. Приравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены, получаем ещё два равенства $A+B=0$ и $A+C=-8$, откуда определяем $B=\dfrac{11}{3}$, $C=-\dfrac{13}{3}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}+$$
$$+\frac{1}{3}\int\frac{(11x-13)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Здесь $\displaystyle\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$.

Для второго интеграла при $x+1>0$ положим $t=\dfrac{1}{x+1}$:

$$-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{11}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$
$$=\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|+C.$$

Третий интеграл был вычислен выше в примере 4 п.4.2.9.

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+$

$$+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|-$$
$$-\frac{2}{3}arctg\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6(x^2+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{6(x^2+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right|+C.$$

4.2.11. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$$

Рассмотрим вычисление этих интегралов с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок.

1. Рационализацию подынтегрального выражения $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $a>0$, можно проводить с помощью *тригонометрической подстановки* $x=a\sin t$, где $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. При этом если t «пробегает» отрезок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то переменная x, соответственно, «пробегает» отрезок $[-a,a]$, что отвечает ОДЗ интеграла. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot|\cos t|=a\cdot\cos t$, так как на промежутке $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ преобразуется к виду тригонометрического рационального выражения $R(a\sin t,a\cos t)$. В случае $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ имеем, с учётом ОДЗ, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, а в случае $R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$, соответственно, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Также в этом случае можно было сделать подстановку $x=a\cos t$, где $t\in[0,\pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию $R(a\cos t,a\sin t)$.

<u>*Пример 1*</u>. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$.

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$. Поскольку по ОДЗ $x\in[-a,a]$, то положим $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=a|\cos t|=a\cos t$, $dx=a\cos t dt$ и получаем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\quad\left(|x|\le a\right).$$

Замечание. Можно было воспользоваться подстановкой $x=a\cos t$, $t\in[0,\pi]$.

Пример 2. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx\quad(a>0)$.

Решение. _1-й способ_. Положим $x=a\sin t$, где $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx=a\cos t\,dt$ и приходим к интегралу

$$a\int\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t\,dt=a\int\frac{\sqrt{1+\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{1-\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}\cos t\,dt=$$

$$=a\int\frac{(1+\sin t)\cos t}{|\cos t|}\,dt=a\int(1+\sin t)\,dt=a(t-\cos t)+C=$$

$$=a\left(\arcsin\frac{x}{a}-\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)+C=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-$$

$$-a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a\le x<a).$$

2-й способ. Для сравнения решим задачу с помощью подстановки $x=a\cos 2t$, где $2t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx=-2a\sin 2t\,dt$,

$$2t=\arccos\frac{x}{a},\quad\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{|\sin t|}=$$

$=\operatorname{sgn}(\sin t)\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{sgn}t\,\frac{\cos t}{\sin t}$, и, следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\operatorname{sgn}t\int\cos^2 t\,dt=-4a\operatorname{sgn}t\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C=$$

$$-a|2t|-a\sin|2t|+C=-a\left|\arccos\frac{x}{a}\right|-a\sin\left|\arccos\frac{x}{a}\right|+C=$$

$$=-a\cdot\arccos\frac{x}{a}-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=-a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}\right)-$$

$$-\sqrt{a^2-x^2}+C=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C-\frac{\pi}{2}a.$$

4.2.12. *Интегралы вида* $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

1. Для рационализации выражений вида $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ применяют тригонометрическую подстановку $x=a\cdot tgt$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. При этом когда переменная t «пробегает» указанный интервал $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ в направлении от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то переменная x один раз «пробегает» всё множество действительных чисел от $-\infty$ до $+\infty$ (взаимно однозначная замена переменной). В этом случае для корня $\sqrt{a^2+x^2}$ получаем:

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\cdot tg^2 t}=a\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{|\cos t|}=\frac{a}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$. В результате иррациональная функция $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(atgt,\frac{a}{\cos t}\right)$, не содержащему радикалов.

Пример 1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$.

Решение. Положим $x = a\cdot tgt$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приходим к интегралу $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{tg\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} =$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dtg\frac{t}{2}}{tg\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C \text{, где } t = arctg\frac{x}{a} \;\; (x\neq 0).$$

2. В данной ситуации можно было также использовать подстановку $x = a\cdot ctgt$, где $t\in(0,\pi)$. Тогда

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\cdot ctg^2 t} = a\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{a}{|\sin t|} = \frac{a}{\sin t},$$

так как на рассматриваемом интервале синус положителен, $dx = -\frac{adt}{\sin^2 t}$. В результате иррациональная функция $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ преобразуется к тригонометрическому виду

$$R\left(a\cdot ctgt,\frac{a}{\sin t}\right).$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.

Решение. Положим $x = a\cdot ctgt$, $t\in(0,\pi)$. Тогда имеем при $x\neq 0$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{-adt}{\sin^2 t\cdot a\cdot ctgt\cdot\frac{a}{\sin t}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t-1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right| + C \text{, где } t = arcctg\frac{x}{a}.$$

3. Выражения $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ рационализируются также с помощью гиперболической подстановки $x = a\cdot sht$, $t\in R$. Тогда $\sqrt{a^2+x^2} =$

$$=\sqrt{a^2+a^2\cdot sh^2 t} = |a|\cdot\sqrt{ch^2 t} = a\cdot|cht| = a\cdot cht \;\; (cht>0 \;\; \forall t\in R).$$

Пример 3. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ $(a>0)$.

Решение. Выполним гиперболическую подстановку $x = asht$, $dx = achtdt$, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+sh^2 t)} = acht$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл

$$a^2\int ch^2 tdt = a^2\int\frac{1+ch2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(\int tdt + \frac{1}{2}\int ch2td(2t)\right) =$$

$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}sh2t + C$. Осталось сделать обратную подстановку. Из равенства $sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ находим, что $e^t = \frac{x\pm\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Так как $e^t>0$, то $t = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| - \ln a$. Очевидно, $sh2t = 2sht\cdot cht =$ $= 2sht\sqrt{1+sh^2 t} = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}$, поэтому окончательно получаем (число $-\frac{a^2}{2}\ln a$ вошло в C)

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + C.$$

4.2.13. *Интегралы вида* $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)dx$ $(a>0)$.

Для рационализации выражений вида $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)$, $R\left(x,\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)$ применяют как тригонометрические, так и гиперболические подстановки.

Рассмотрим случай $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$. Подкоренное выражение определено при $|x|\ge a$. Возможны подстановки:

1. $x=\dfrac{a}{\sin t}$, где $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, при этом радикал преобразуется следующим образом: $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=$

$=a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)^2}=a\cdot|ctgt|$, и подынтегральная функция оказывается рационально зависящей от тригонометрических функций $R\left(\dfrac{a}{\sin t},a|ctgt|\right)$.

2. Аналогичная подстановка через косинус $x=\dfrac{a}{\cos t}$, где $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, приводит к следующим преобразованиям:

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}=a\cdot|tgt|.$$

И опять подынтегральная функция принимает рациональный (относительно тригонометрических функций) вид $R\left(\dfrac{a}{\cos t},a|tgt|\right)$.

3. $x=a\cdot cht$, $t\ge 0$ (если $x>0$) или подстановка $x=-a\cdot cht$, $t\ge 0$ (если $x<0$). Тогда

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\cdot ch^2t-a^2}=a\cdot\sqrt{sh^2t}=a\cdot|sht|,$$

и выражение $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ приводится к виду $R(a\cdot cht,a|sht|)$.

При наличии радикала $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$ в подынтегральном выражении (ОДЗ: $x\in(-\infty,-a)\cup[a,+\infty)$) можно воспользоваться подстановкой

$$x=\frac{a}{\cos t},\text{ где } t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\text{ и тогда } \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\dfrac{1}{\cos t}-1}{\dfrac{1}{\cos t}+1}}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}}=\left|tg\frac{t}{2}\right|.$$

С другой стороны, в этом случае возможна подстановка $x=a\cdot cht$:

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{cht-1}{cht+1}}=\sqrt{\frac{2sh^2\dfrac{t}{2}}{2ch^2\dfrac{t}{2}}}=\left|th\frac{t}{2}\right|.$$

<u>*Замечание*</u>. Ещё раз обратим внимание читателя на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ (или $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x>a$ или на луче $x<-a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т.е. луч $x>a$ (на другом луче $x<-a$ первообразная находится аналогичными рассуждениями). Поэтому, учитывая это, в указанных выше подстановках можно ограничиться уменьшенными вполовину промежутками по t:

$$x=\frac{a}{\sin t}\text{ при } t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],\ x=\frac{a}{\cos t}\text{ при } t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$x=a\cdot cht\text{ при } t\in[0,+\infty).$$

Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой ситуации можно использовать функцию сигнум.

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$ $(x>a)$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x=\dfrac{a}{\cos t}$, где $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем $dx=\dfrac{a\sin tdt}{\cos^2 t}=\dfrac{atgtdt}{\cos t}$, $\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}=$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2\right)^3}=a^3\sqrt{tg^6t}=a^3tg^3t.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{tg^2 t\cos t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} =$$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C$. Осталось сделать обратную подстановку.

Так как $x = \frac{a}{\cos t}$, то $\cos t = \frac{a}{x}$,

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$.

<u>Пример 2</u>. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x>a)$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку: $x = acht$, $t \ge 0$. Тогда $dx = ashtdt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a|sht| = asht$ и интеграл сводится к интегралу $\int dt = t + C$. Сделаем обратную подстановку: $x = acht \Leftrightarrow cht = \frac{x}{a}$ $\Leftrightarrow t = Arch\frac{x}{a}$, где обратная функция к указанной ветви гиперболического косинуса имеет вид

$$Archx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x \ge 1.$$

Итак, $\int dt = t + C = Arch\frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C =$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C',$$

где в постоянную C' здесь включено слагаемое $(-\ln a)$.

<u>Пример 3</u>. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$ $(x \ge a)$.

Решение. В некоторых случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида наряду с указанными подстановками можно применять и другие. Например, в данном случае положим $x - a = 2ash^2 t$, тогда

$$x + a = 2a(sh^2 t + 1) = 2ach^2 t \text{ и } \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{2ash^2 x}{2ach^2 x}} = \frac{shx}{chx},$$

$dx = 4asht \cdot cht \cdot dt$ и приходим к интегралу

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int sh^2 tdt = 4a\int \frac{ch2t-1}{2}dt = ash2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $sht = \sqrt{\frac{x-a}{2a}}$, $cht = \sqrt{\frac{x+a}{2a}}$, имеем $a \cdot sh2t =$ $= 2a \cdot sht \cdot cht = \sqrt{x^2-a^2}$. Далее, $sht + cht = e^t$, отсюда

$$t = \ln(sht + cht) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}\right) =$$

$= \ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) - \ln\sqrt{2a}$. Окончательно получим

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) + C',$$

где $C' = C - \ln\sqrt{2a}$.

4.2.14. *1-я подстановка Эйлера* $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера. *1-я подстановка Эйлера* применима в случае, когда $a > 0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$). Возведём это равенство в квадрат:

$$ax^2+bx+c = \left(t - x\sqrt{a}\right)^2,$$

$$\cancel{ax^2} + bx + c = t^2 - 2tx\sqrt{a} + \cancel{ax^2},$$

откуда выражаем x через t: $x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$.

Тогда $dx = 2\cdot\frac{\sqrt{a}\cdot t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\cdot t + b\right)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} =$

$$= t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}=\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b}.$$ Переходя к новой переменной интегрирования, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt.$$

Вычислив интеграл, необходимо сделать обратную подстановку

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, то применим 1-ю подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2+a}=t-x.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2, \text{ или } x=\frac{t^2-a}{2t}.$$

Дифференцируя данное равенство, находим $dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt$,

$\sqrt{x^2+a}=\frac{t^2+a}{2t}$. Подставляя в подынтегральное выражение, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, здесь также возможно применение 1-й подстановки Эйлера:

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x.$$

Теперь возведём это равенство в квадрат:

$$x^2-x+1=(t-x)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-x+1=t^2-2tx+\cancel{x^2} \Leftrightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1}.$$

Дифференцируя, находим $dx=\left(\frac{t^2-1}{2t-1}\right)'dt=2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл $2\cdot\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt$. Далее представляем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и вычисляем:

$$2\cdot\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt=2\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^2}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\frac{3}{2(2t-1)}+C,$$

где $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$.

4.2.15. *2-я подстановка Эйлера* $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

2-я подстановка Эйлера применима при вычислении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, если свободный член $c>0$.

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ (можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$). Возведём данное равенство в квадрат:

$$ax^2+bx+\cancel{c}=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+\cancel{c}.$$

После сокращения на $x\neq 0$ имеем для x: $x=\frac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}$.

Тогда $dx=2\cdot\frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}=$

$$=\frac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}\cdot t+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

В результате замены переменной приходим к интегралу от рациональной дроби

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2} \right) \cdot 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{\left(a - t^2\right)^2} dt .$$

Вычислив интеграл, в конце подставим

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x} .$$

Пример. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Решение. Рассмотрим интеграл из предыдущего примера, но теперь вычислим его при помощи 2-й подстановки Эйлера (т.к. свободный член квадратного трёхчлена $c = 1 > 0$, это возможно). Положим

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt - 1,$$

возведём в квадрат:

$$x^2 - x + \cancel{1} = x^2 t^2 - 2xt + \cancel{1} .$$

После сокращения на x, выражаем из оставшегося равенства x через t: $x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}$. Тогда $dx = -2 \cdot \frac{t^2 - t + 1}{\left(t^2 - 1\right)^2} dt$ и $\sqrt{x^2 - x + 1} = xt - 1 = = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}$, $x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t - 1}$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t - 1)(t + 1)^2} dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2(t - 1)} - \frac{3}{2(t + 1)} - \frac{3}{(t + 1)^2} \right) dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t - 1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t + 1} - 3\int \frac{dt}{(t + 1)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t - 1| - \frac{3}{2}\ln|t + 1| + \frac{3}{t + 1} + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}.$$

4.2.16. *3-я подстановка Эйлера* $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = t(x - \lambda)$

3-я подстановка Эйлера применяется при вычислении интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ в случае, когда квадратный трёхчлен

$ax^2 + bx + c$ имеет различные вещественные корни λ и μ, т.е.

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

Положим $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$. Возведём равенство в квадрат:

$$a(x - \lambda)(x - \mu) = t^2 (x - \lambda)^2 .$$

Сократим на $x - \lambda \neq 0$ и, выражая x через t, получим $x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}$.

Дифференцируя, находим $dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{\left(t^2 - a\right)^2} dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = = t(x - \lambda) = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}$. Подставляя в исходный интеграл, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a} \right) \cdot \frac{2a(\mu - \lambda)t}{\left(t^2 - a\right)^2} dt .$$

Вычислив интеграл, в конце выполним подстановку $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - \lambda}$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся 3-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$. Возведём равенство в квадрат: $(a + x)(a - x) = t(a - x)$, откуда найдём $x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$. Тогда получаем следующее соотношение между дифференциалами: $dx = \frac{4atdt}{\left(t^2 + 1\right)^2}$. Кроме того, $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}$. Переходя к новой переменной под знаком интеграла, получаем при $|x| < a$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + C .$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решение. Поскольку квадратный трёхчлен под знаком радикала имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, то применим 3-ю подстановку Эйлера:

$$\sqrt{1-2x-x^2} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right).$$

Переписав данное равенство в виде

$$\sqrt{-\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right),$$

возведём его в квадрат и сократим на $\left(x+1+\sqrt{2}\right)$. Выражая затем x через t, получим $x = \frac{-t^2\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}-1}{t^2+1}$, $\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}$, $1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1}$, $dx = -\frac{4\sqrt{2}tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$. Таким образом, сводим исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -4\sqrt{2}\int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)},$$

который вычисляем стандартным образом.

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удаётся более просто вычислить интеграл другим способом.

4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Так называются дифференциалы вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где a, b - действительные числа, отличные от нуля, m, n, p — рациональные числа.

> ***Чебышёв** Пафнутий Львович* (1821 – 1894) — русский математик и механик, академик Петербургской АН. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

Как доказал П.Л.Чебышёв, первообразная для функции $x^m\left(a+bx^n\right)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях:

а) p — целое; б) $\frac{m+1}{n}$ — целое; в) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое.

Рассмотрим эти случаи.

а) Если p — целое, то полагают $t = \sqrt[s]{x}$, где s — общий (натуральный) знаменатель дробей m и n (см. интегрирование линейных иррациональностей).

Пример 1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$. Очевидно, что $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$, $a = b = 1$. Положим $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5dt$ и в результате замены переменной интегрирования приходим к интегралу

$$6\int \frac{t^8dt}{\left(1+t^2\right)^2} = 6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt =$$

$$= 6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3\left(t^2+1\right)+t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt = \frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-$$

$$-18arctgt-6\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2}, \text{ где } \int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right) =$$

$= -\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}arctgt+C$. Следовательно, при $x \ge 0$ имеем

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21arctgt+C, \text{ где } t = \sqrt[6]{x}.$$

б) Если $\frac{m+1}{n}$ — целое, то полагают $t = \sqrt[s]{a+bx^n}$, где s — знаменатель дроби p.

Пример 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. *Решение*. Перепишем интеграл в виде $\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, откуда определяем $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $s=2$. Так как $\frac{m+1}{n}=3$ – целое, то положим $t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$. Тогда $x=\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$, $dx=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}2tdt$. Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C, \text{ где } t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}.$$

в) Если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то рекомендуемая подстановка $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Приведём интеграл к виду $\int x^0\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx$ и определяем $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$, $s=4$. Поскольку $\frac{m+1}{n}+p=0$ – целое, то положим, следуя рекомендации, $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$. Тогда $x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt$, $\sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C,$$

где $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

4.4. Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования

1. При интегрировании выражений, содержащих радикалы, иногда возможно использование известного приёма *домножения (с одновременным делением) на сопряжённое выражение*.

Пример 1. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \ \ (a>0)$.

Решение. На ОДЗ имеем $-a\le x<a$, и поэтому $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$. Домножим и разделим подынтегральную дробь на выражение, сопряженное знаменателю. В результате интеграл удаётся свести к сумме двух более простых интегралов: $\int\frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$

$$=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} \ \ (a\ne b)$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к знаменателю, т.е. на $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\int\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}{a-b}dx=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}dx-\int\sqrt{x+b}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}d(x+a)-\int\sqrt{x+b}d(x+b)\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}}\right)+C \ \ \left(x\ge -a, x\ge -b\right).$$

2. В следующем примере используется приём *выделения полного квадрата* в подкоренном выражении.

Пример 3. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

Решение. Если заметить, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат, то это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C \ (x \neq 0).$$

3. Часто при интегрировании используются различные подстановки, в том числе нестандартные.

Пример 4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. Тогда имеем $\int \frac{d\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$. Положим $t = 1+\sqrt{1+x^2}$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Пример 5. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx \ (a>0)$.

Решение. Согласно ОДЗ, $\frac{x}{2a-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,2a)$. Сделаем тригонометрическую подстановку вида $x = 2a\sin^2 t$, где $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Приходим к интегралу

$$\int \left(2a\sin^2 t\right)\sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a-2a\sin^2 t}}d\left(2a\sin^2 t\right) = 8a^2\int \sin^4 tdt =$$

$$= 8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 8a^2\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right)dt =$$

$$= 8a^2\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right)dt = a^2\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Очевидно, $\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}}$, тогда $\sin 2t = 2\sin t\cos t = = 2\cdot\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}$. Найдём $\cos 2t$: если $t \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in [0,a)$), то $\cos 2t > 0$ и $\cos 2t = \sqrt{1-\sin^2 2t} = \sqrt{1-\frac{x(2a-x)}{a^2}} = = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x(2a-x)} = \frac{1}{a}\sqrt{(a-x)^2} = \frac{|a-x|}{a} = \frac{a-x}{a}$; если же $t \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $x \in [a,2a)$, то $\cos 2t \leq 0$ и, следовательно, $\cos 2t = -\sqrt{1-\sin^2 2t} = -\frac{|a-x|}{a} = \frac{a-x}{a}$. Таким образом, $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2t = \frac{a-x}{a}$. Поэтому $\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = \frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)}\frac{a-x}{a}$.

Подставляя, получим для исходного интеграла: $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx =$

$$= a^2\left(3\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{2a}\sqrt{x(2a-x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)+C =$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

<u>Пример 6</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, тогда $x=\left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)^2$.

Переходя к новой переменной, получим

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^2}+$$

$$+C=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C\quad(x\ge 0).$$

К интегралам от квадратичных иррациональностей естественным образом примыкают интегралы от иррациональностей следующего вида:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx,$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+r}\right)dx,$$

содержащие под знаком радикала многочлены 3-й и 4-й степеней (с действительными коэффициентами). Эти интегралы часто встречаются в приложениях и, вообще говоря, не являются элементарными функциями. Оба эти интеграла принято называть *эллиптическими* в тех случаях, когда они не выражаются через элементарные функции, и *псевдоэллиптическими* в тех случаях, когда они выражаются через элементарные функции (происхождение названия интегралов связано с тем, что впервые с этими интегралами столкнулись при решении задачи о вычислении длины дуги эллипса). Среди эллиптических интегралов особенно важную роль играют так называемые эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме *Лежандра*

$$F(k,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad\text{и}\quad E(k,\varphi)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Для этих функций составлены обширные таблицы и графики. А.Лежандром и другими математиками изучены свойства данных функций и установлен ряд формул.

Наряду с элементарными функциями функции $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ прочно вошли в семейство функций, часто используемых в анализе.

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределённые интегралы:

1. $\displaystyle\int x\sqrt{x-2}\,dx$. Ответ: $\dfrac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C\quad(x\ge 2)$.

2. $\displaystyle\int x^2\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx$. Ответ: $-3\left(\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{7}t^7+\dfrac{1}{10}t^{10}\right)+C$, где $t=\sqrt[3]{1-x}$.

3. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$. Ответ: $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-8\sqrt{x+4}+C\quad(x>-4)$.

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}$. Ответ: $-\sqrt{2}\,arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+C\quad(x<1)$.

5. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$. Ответ: $\ln\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,
где $t=\sqrt{x+1}\quad(x>-1;x\ne 0)$.

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.
Ответ: $\dfrac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}}+3(2x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right|+C\quad\left(x>-\dfrac{1}{2};\ x\ne 0\right)$.

7. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}dx$.
Ответ: $3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|-3\ln\sqrt[6]{2x-1}+C\quad\left(x>\dfrac{1}{2};x\ne 1\right)$.

8. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}{(x+1)\left(4-\sqrt[3]{x+1}\right)}dx$.
Ответ: $-6t-3\ln\left|4-t^2\right|-6\ln\left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|+C$, где $t=\sqrt[6]{x+1}\quad(x>-1;x\ne 63)$.

9. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. Ответ: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\quad(-1<x\le 1)$.

10. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$. Ответ: $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2t}{t^3-1}$,

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $(x\neq 1)$.

11. $\int x\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}dx$ $(x\notin(-2,3])$.

Ответ: $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x-6}+\dfrac{35}{8}\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-6}\right|+3\sqrt{x^2-x-6}+C$.

12. $\int\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\dfrac{dx}{x+1}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $(x\neq\pm1)$.

13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $(x\neq\pm1)$.

14. $\int\dfrac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. Ответ: $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}+C$ $(x\notin[-2,1])$.

15. $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. Ответ: $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$ $(x\neq\pm1)$.

16. $\int\dfrac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}\right)^3}-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}arctg\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$ $(x>0)$.

17. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$. Ответ: $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$ $(x\notin[-2,0])$.

18. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$. Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$.

19. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$. Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x+1}{2}+C$ $(x\in(-3,1))$.

20. $\int\dfrac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$.

Ответ: $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\dfrac{x-2}{3}+C$ $(x\in(-1,5))$.

21. $\int\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$.

Ответ: $3\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$.

22. $\int\sqrt{x^2+4x+13}dx$.

Ответ: $\dfrac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13}+\dfrac{9}{2}\ln\left|x+2\right|+\sqrt{x^2+4x+13}+C$.

23. $\int\sqrt{5+4x-x^2}dx$.

Ответ: $\dfrac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x-2}{3}+C$ $(x\in(-1,5))$.

24. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. Ответ: $-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$ $(|x|\leq 1)$.

25. $\int(1-3x)\sqrt{1+x-x^2}dx$ $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{5}{16}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

26. $\int(x+1)\sqrt{x^2+4x+1}dx$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\left(x^2+4x+1\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+1}+$

$+\dfrac{3}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$ $\left(x\notin\left(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)\right)$.

27. $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ответ: $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$.

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$.

Ответ: $-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}+C \quad \left(x \notin \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\right)$.

29. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$. Ответ: $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C \quad (x \notin [-2,0])$.

30. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Ответ: $-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C \quad (x \neq -1)$.

31. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3(x-1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right|+C \quad (x \neq 1)$.

32. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. Ответ: $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C \quad (x \neq 0)$.

33. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$. Ответ: $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C \quad (|x|>1)$.

34. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$.

Ответ: $-\left(\frac{x}{2}+5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x-2}{2}+C \quad (x \in (0,4))$.

35. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

Ответ: $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-$

$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2\left(x^2+2x+2\right)}}{x}\right|+C \quad (x \neq 0)$.

36. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad \left(x \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)\right)$.

Ответ: $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}+C$.

37. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. Ответ: $2\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}+C \quad (x \geq -1; x \neq 0)$.

38. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}} \quad (x \neq -1; 0)$.

Ответ: $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{1+x^5}$.

39. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. Ответ: $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C \quad (x>0)$.

40. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$. Ответ: $3arctg\sqrt[3]{x}+C \quad (x \neq 0)$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$. Ответ: $-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C \quad (x>0)$.

42. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C \quad (x \neq 0)$.

43. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+x^3}-1\right)^2}{x^3}\right|+C \quad (x>-1; x \neq 0)$.

44. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C \quad (x \geq 1)$.

45. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Ответ: $\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C \quad (|x|<1)$.

46. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$ $(x \geq -2)$.

Ответ: $-\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+3)^{\frac{3}{2}}+C$.

47. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ $\left(x \in \left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)\right)$. Ответ:

$\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|+C$.

48. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

Ответ: $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C$ $(x \neq \pm 1)$.

49. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Ответ: $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$.

50. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$ $\left(x \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]; x \neq -1\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C$.

51. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ответ: $\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+C$, где $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$ $(x \neq -1)$.

52. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ ($x \in \left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$).

Ответ: $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2arctgt+C$, где $t=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

53. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x-2}}$ $\left(x \notin (-1,2); x \neq -2\right)$.

Ответ: $x-2\ln|x+2|+\sqrt{x^2-x-2}-\frac{5}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right|-$

$-2\ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{5}{4(x+2)}+\frac{1}{4}}\right|+C$.

54. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2}$ $\left(x \notin (-1,0)\right)$.

Ответ: $\frac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|+C$, где $t=-x+\sqrt{x(1+x)}$.

55. $\int \frac{x^4-5x^3+6x-7}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+6\right)\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{53}{2}\ln|x+1|+$

$+\sqrt{x^2+2x+3}+C$ $(x \neq -1)$.

§ 5.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При интегрировании тригонометрических функций наряду с алгебраическими преобразованиями эффективно используются всевозможные тригонометрические преобразования. Все интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны.

В простейших случаях интегралы вычисляются непосредственным сведением их к табличным. Но в большинстве случаев надо знать подходы и осознанно применять их там, где нужно. Рассмотрим отдельные классы интегралов от тригонометрических функций и общие рекомендации по их вычислению.

5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Здесь, как и прежде, под R понимается рациональная функция своих аргументов. Это достаточно широкий класс интегралов, если учесть, что tgx и $ctgx$ также выражаются через синус и косинус. Интегралы данного вида вычисляются следующими методами.

5.1.1. *Метод универсальной подстановки*

Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = tg\dfrac{x}{2}$ (или $t = ctg\dfrac{x}{2}$). Тогда $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, и далее интегралы вычисляются соответствующими методами интегрирования рациональных дробей. Обратим ещё раз внимание на то, что применение подстановки $t = tg\dfrac{x}{2}$ возможно только на

промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, где $n \in Z$ $(-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n)$. В дальнейшем это подразумевается. К недостаткам этого подхода можно отнести тот факт, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям. В частности, этим методом можно вычислять интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}.$$

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2}$.

Решение. $$\int \frac{dx}{\sin x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = tg\frac{x}{2}.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sin x(1-\cos x)}$.

Решение. Положим $t = tg\dfrac{x}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2tdt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} - \int dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}tg\frac{x}{2} + C.$$

В некоторых случаях вычисление интегралов данного типа может быть упрощено за счёт выбора других, более удачных, подстановок.

5.1.2. *Случай, когда* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, т.е. при всех x из области интегрирования верно $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Пример 1. $\int tgxdx$.

Решение. $\int tgxdx = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$,

где $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$.

Пример 2. $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

Решение. Заметив, что подынтегральная функция $\frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{1-2\sin^2 x}$ нечётна относительно $\sin x$, сделаем рекомендуемую подстановку $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $-\sin xdx = dt$, и получаем

$$\int \frac{(2-\cos^2 x)(-d\cos x)}{2\cos^2 x - 1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} = \int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} dt = \frac{t}{2} -$$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C.$$

Пример 3. $\int \frac{\sin 2xdx}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7} \quad \left(x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\right)$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, то сделаем подстановку $t = \cos x$. Тогда получаем интеграл

$$\int \frac{-2tdt}{4\left(t^2 + 3t + \frac{9}{4}\right) - 16} = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{2}\int \frac{udu}{u^2-4} +$$

$$+\frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2-4} = -\frac{1}{4}\ln\left|\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\right| + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{7}{2}}\right| + C.$$

5.1.3. *Случай, когда* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т.е. при всех допустимых x верно равенство

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то рекомендуется подстановка $t = \sin x$.

Пример 1. $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция $\frac{(\cos^2 x + \cos^4 x)\cos x}{1-\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2}$ нечётна относительно косинуса x, то положим $t = \sin x$. Получим интеграл $(x \neq \pi n, n \in Z)$: $\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} =$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right)dt = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6arctg(\sin x) + C.$$

Пример 2. $\int \frac{\cos xdx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$.

Решение. Замечая, что подынтегральная функция нечётна относительно косинуса, положим $t = \sin x$:

$$\int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2 + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1}{\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(arctg\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) + arctg\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)\right) + C.$$

5.1.4. *Случай, когда* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ чётна относительно синуса и косинуса, т.е. при всех допустимых x выполняется тождество

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то к цели приводит подстановка $t = tgx$, $-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ (или $t = ctgx$, $\pi n < x < \pi + \pi n$), где $n \in Z$. При этом $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $x = arctgt$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. В частности, этим способом можно вычислять тригонометрические интегралы вида $\int \dfrac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x}$.

<u>Пример 1</u>. $\int tg^2 x dx$.

Решение. $\int tg^2 x dx = \int tg^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} d(tgx) =$

$$= \int \frac{(tg^2 x + 1) - 1}{1 + tg^2 x} d(tgx) = \int d(tgx) - \int \frac{d(tgx)}{1+tg^2 x} =$$

$$= tgx - arctg(tgx) + C = tgx - x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

Однако проще было поступить следующим образом:

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$
$$= tgx - x + C.$$

<u>Пример 2</u>. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x + 2tgx - 1\right)} = \int \frac{dtgx}{tg^2 x + 2tgx - 1} = \int \frac{d(tgx+1)}{(tgx+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{tgx + 1 - \sqrt{2}}{tgx + 1 + \sqrt{2}}\right| + C \ \left(tgx \neq -1 \pm \sqrt{2}\right).$$

<u>Пример 3</u>. $\int \dfrac{\sin x dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$.

Решение. Поделив одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, приходим к интегралу $(tgx \neq -1)$:

$$\int \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + 1\right)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{tgx d(tgx)}{1+tgx} = -\ln|1+tgx| + tgx + C.$$

<u>Замечание</u>. Любое рациональное выражение $R(u,v)$ аргументов u и v всегда можно представить в виде суммы трёх выражений, рассмотренных в пунктах 5.1.1–5.1.3:

$$R(u,v) = \frac{R(u,v) - R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v) - R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v) + R(u,v)}{2}$$

или $R(u,v) = R_1(u,v) + R_2(u,v) + R_3(u,v)$, где функция $R_1(u,v)$ – нечётна относительно u, функция $R_2(u,v)$ – нечётна относительно v, а функция $R_3(u,v)$ – чётна относительно u и v. Поэтому мы рассмотрели весьма общий подход к интегрированию рациональных выражений от тригонометрических функций.

5.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

5.2.1. *Интегралы вида* $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ $(n \in N)$

Эти интегралы можно вычислять, последовательно понижая степень с помощью соответствующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4},$$

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}, \cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8} \text{ и др.}$$

Интегрированием по частям можно вывести общие формулы понижения степени для интегралов данного вида (см. пример 5).

<u>Пример 1</u>. $\int \sin^3 x dx$.

Решение. $\int \sin^3 x dx = \dfrac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) dx = -\dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Можно было интегрировать иначе:

$$\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx = -\int\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C .$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \sin^4 x dx$.

Решение. $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int\left(3-4\cos 2x+\cos 4x\right)dx =$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$. Если формулы понижения степени нет под рукой, её легко можно вывести или интегрировать постепенно:

$$\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(3-4\cos 2x+\cos 4x\right)dx \text{ и т.д.}$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int \cos^5 x dx$.

Решение. $\int \cos^5 x dx = \int\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx = \int\left(1-t^2\right)^2 dt =$

$$= \int\left(1-2t^2+t^4\right)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x +$$

$$+ \frac{1}{5}\sin^5 x + C .$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int \cos^6 x dx$.

Решение. $\int\left(\cos^2 x\right)^3 dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{8}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} +$$

$$+ \frac{3}{64}\sin 2x + \frac{1}{8}\int\cos 2x dx - \frac{1}{16}\int\sin^2 2x d\left(\sin 2x\right) = \frac{5x}{16} + \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C .$$

<u>*Пример 5*</u>. ***Вывести формулу понижения для интегралов***

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad \left(n \in N, n > 2\right).$$

Решение. В этом примере эффекта понижения степени удаётся добиться путём интегрирования по частям:

$$I_n = -\int \sin^{n-1} x d\cos x = -\cos x \sin^{n-1} x +$$

$$+\left(n-1\right)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + +\left(n-1\right)I_{n-2} - \left(n-1\right)I_n ,$$

$$\text{откуда } I_n = \frac{1}{n}\left(\left(n-1\right)I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x\right),\ n = 3,4,5,...$$

5.2.2. Случай, когда n и m – положительные чётные числа

Если оба показателя n и m – положительные чётные числа, то, как и в предыдущем пункте, применяются формулы понижения для 2-й, 3-й, 4-й и т.д. степеней:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x ,\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right).$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение. $\frac{1}{4}\int \cos^2 x \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}dx =$

$$= \frac{1}{16}\int\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x\right)dx = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} -$$

$$- \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{32}\int\left(\cos 2x+\cos 6x\right)dx = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} -$$

$$- \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C .$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int\left(\sin x \cos x\right)^2 \sin^2 x dx =$

$$= \int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\left(1-\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x\right)dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

5.2.3. *Случай, когда n или m – натуральное нечётное число*

Если хотя бы один из показателей n или m – натуральное нечётное число, то рекомендуемая подстановка $t=\sin x$ (если m – натуральное нечётное) или $t=\cos x$ (если n – натуральное нечётное). При этом используются формулы $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, а также формулы понижения степени

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4},\ \cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4} \text{ и др.}$$

Пример 1. $\int \sin^3 xdx$.

Решение. $\int \sin^3 xdx=\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin xdx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=$

$$=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C.$$

Пример 2. $\int \sin^5 x\cos^4 xdx$.

Решение. $\int \sin^5 x\cos^4 xdx=-\int \sin^4 x\cos^4 xd(\cos x)=$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^4 xd(\cos x)=$$

$$=-\int\left(\cos^4 x-2\cos^6 x+\cos^8 x\right)d\left(\cos x\right)=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-$$

$$=-\frac{1}{9}\cos^9 x+C.$$

Пример 3. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx$.

Решение. Приведём интеграл к виду $\int \sin^3 x\cos^{-\frac{4}{3}} xdx$ и сделаем подстановку $t=\cos x$: $-\int\left(1-t^2\right)t^{-\frac{4}{3}}dt=\int(t^{\frac{2}{3}}-t^{-\frac{4}{3}})dt=$

$$=\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+3t^{-\frac{1}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+C\quad\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right).$$

5.2.4. *Случай, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности*

Если n и m – целые отрицательные числа одной чётности (оба одновременно чётны либо оба нечётны), то полагают $t=tgx$ (или $t=ctgx$) и применяют формулы

$$1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\ 1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\ \cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Также бывает иногда полезно понизить степени в знаменателе, представляя единицу в числителе дроби как тригонометрическую единицу (или её степень).

Пример 1. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^2 x\cos^6 x}=\int\frac{dtgx}{tg^3 x\frac{1}{\left(1+tg^2 x\right)^3}}=$

$$=\int\frac{\left(1+tg^2 x\right)^3 dtgx}{tg^3 x}=\int\frac{\left(1+u^2\right)^3 du}{u^3}=\int\left(\frac{1}{u^3}+\frac{3}{u}+3u+u^3\right)du=$$

$$=-\frac{1}{2u^2}+3\ln|u|+\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{4}u^4+C=-\frac{1}{2tg^2 x}+3\ln|tgx|+\frac{3}{2}tg^2 x+$$

$$+\frac{1}{4}tg^4 x+C\quad\left(x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right).$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. 1-й способ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C\quad\left(x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right).$$

2-й способ. В данном случае можно было поступить иначе:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{4dx}{\sin^2 2x}=2\int\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-2ctg2x+C.$$

5.2.5. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \frac{dx}{\cos^n x} \ (n \in N)$

Случай $n = 1$ рассмотрен в примере 1 настоящего пункта.

При $n = 2$ это известные табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$$

При $n > 2$ интегралы такого вида сводятся к интегралам вида 5.2.4:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{2^{n-1} \sin^n \frac{x}{2} \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cos^n u};$$

в свою очередь,

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^m u}.$$

Иногда они вычисляются с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \text{ и } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x.$$

Интегралы от нечётной натуральной степени секанса или косеканса проще всего находятся по рекуррентным формулам понижения:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}, \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}. \qquad (2)$$

Пример 1. а) $\int \frac{dx}{\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. а) При интегрировании функции $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (на промежутках между соседними точками серии $x = \pi n, n \in Z$, где косеканс определён) перейдём к тангенсу половинного аргумента:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot tg \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(tg \frac{x}{2}\right)}{tg \frac{x}{2}} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C.$$

С другой стороны, в этой же ситуации можно было домножить и одновременно разделить выражение $\frac{1}{\sin x}$ на $\sin x$ и перейти к дифференциалу от $\cos x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{-d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

б) Умножением и одновременным делением подынтегрального выражения на $\cos x$ можно вычислить и интеграл от секанса x:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

С другой стороны, при вычислении последнего интеграла можно было прибегнуть к введению вспомогательного аргумента $\frac{\pi}{4}$ и свести к предыдущему интегралу от косеканса $(\cos x \neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(ctgx) = -\int \left(1 + ctg^2 x\right) d(ctgx) =$

$$= -ctgx - \frac{1}{3} ctg^3 x + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z).$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$.

Решение. $\int \frac{1}{\cos^2 x} d(tgx) = \int \left(1 + tg^2 x\right) d(tgx) = tgx + \frac{1}{3} tg^3 x + C.$

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Решение. Применяя рекуррентную формулу (2) при $n=2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Полагая теперь $n=1$, по той же формуле имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Так как

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, \text{ то } \int\frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, \text{ а}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \ (x\neq \pi n, n\in Z).$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

Решение. При $\cos x \neq 0$ имеем $\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{16}\int\frac{d\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^5\frac{u}{2}\cos^5\frac{u}{2}} =$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{dtg\frac{u}{2}}{\frac{\sin^5\frac{u}{2}}{\cos^5\frac{u}{2}}\cdot\cos^8\frac{u}{2}} = \frac{1}{16}\int\frac{\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)^4}{tg^5\frac{u}{2}}dtg\frac{u}{2} = \frac{1}{16}\int\frac{\left(1+z^2\right)^4}{z^5}dz =$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}dz = -\frac{1}{64}z^{-4} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{8}\ln|z| +$$

$$+\frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{64}z^4 + C = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

5.2.6. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное

Если n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное, то полагают $t=\sin x$ (если m – натуральное нечётное) или $t=\cos x$ (если n – натуральное нечётное). Иногда в случае больших степеней n и m с целью понижения этих степеней полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить единицу суммой $\sin^2 x+\cos^2 x$ или даже её степенью.

Пример. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x}$.

Решение.

$$\int\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2}{\sin^3 x\cos^4 x}dx = \int\frac{\sin x dx}{\cos^4 x} + 2\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\sin x\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} +$$

$$+2\left(\frac{1}{\cos x} + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\right) + \left(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\right) + C = \frac{1}{3\cos^3 x} +$$

$$+\frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \ \left(x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right).$$

5.2.7. Случай, когда один из показателей чётный, а другой – целый отрицательный

Если n – чётное число, а m – целое отрицательное число, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, и в этом случае интеграл сводится к интегралу вида $\int\frac{dx}{\cos^n x}$ $(n\in N)$. В случае чётного m и целого отрицательного n аналогично заменяют $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$. Если оба показателя n и m – чётны, то полагают $t=tgx$. Если оба показателя степени отрицательны, то с целью понижения этих степеней иногда рекомендуется заменить единицу в числителе подынтегральной функции суммой $\sin^2 x+\cos^2 x$ или её степенью.

Пример 1. $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}dx$.

Решение. $\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} - \frac{5\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Полагая $t = tgx$, находим $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2\left(t^2+1\right)dt =$

$$= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^5 x}{5} + \frac{tg^3 x}{3} + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} dx$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx =$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C \ \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right).$$

5.2.8. *Случай, когда один из показателей нечётный, а другой – целый отрицательный*.

Если n – нечётное число, а m – целое отрицательное число, то полагают $t = \cos x$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае, когда m – нечётное, а n – целое отрицательное число, полагают $t = \sin x$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

<u>*Пример*</u>. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. $-\int \frac{\sin^6 x d\cos x}{\cos^2 x} = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^3 d\cos x}{\cos^2 x} =$

$$= -\int \frac{1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6}{u^2} du = \frac{1}{u} + 3u - u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 3\cos x - \cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

5.3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, а также $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot \sin cx dx$ и др.

Эти интегралы находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

<u>*Пример 2*</u>. $\int \sin 7x \sin 3x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 10x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

<u>*Пример 3*</u>. $\int \cos 3x \cos x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

<u>*Пример 4*</u>. $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3} dx$.

Решение. Имеем $\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{3} dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6} + \sin\frac{5x}{6} + \sin\frac{7x}{6} - \sin\frac{11x}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6} + C.$$

5.4. Интегралы вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ $(n \in N)$

Случаи $n=1$ и $n=2$ рассмотрены ниже в примерах 1 и 2. При $n>2$ указанные интегралы вычисляются с помощью формул $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, которые последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

<u>*Пример 1*</u>. $\int tgx dx$.

Решение. $\int tgx dx = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

<u>*Пример 2*</u>. $\int tg^2 x dx$.

Решение. $\int tg^2 x dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int tg^7 x dx$.

Решение. $\int tg^5 x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int tg^5 x dtgx - \int tg^5 x dx =$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x dtgx + \int tg^3 x dx =$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \int tgx \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x +$$

$$+ \int tgx dtgx - \int tgx dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

5.5. Интегралы вида $\int tg^n x \cdot \dfrac{dx}{\cos^m x}$, $\int ctg^n x \cdot \dfrac{dx}{\sin^m x}$, где $n \in R$, m – чётное натуральное число

Такие интегралы находятся аналогично рассмотренным в предыдущем пункте с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \text{ и } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$$

с последующей заменой $t = tgx$ или, соответственно, $t = ctgx$.

<u>*Пример*</u>. $\int tg^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение. $\int tg^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x} = \int \; tg^4 x \cdot \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} \right)^2 d(tgx) =$

$$= \int tg^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 d(tgx) = \int tg^4 x (1 + tg^2 x)^2 d(tgx) =$$

$$= \int tg^4 x d(tgx) + 2 \int tg^6 x d(tgx) + \int tg^8 x d(tgx) =$$

$$= \frac{1}{5} tg^5 x + \frac{2}{7} tg^7 x + \frac{1}{9} tg^9 x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

5.6. Интегралы вида $\int \dfrac{dx}{a \sin x + b \cos x}$, $\int \dfrac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\int \dfrac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ можно было бы сделать универсальную подстановку $t = tg \dfrac{x}{2}$. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента:

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)},$$

где

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

и положить далее $t = tg\frac{x+\varphi}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно, приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ вычисляются универсальной подстановкой $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 1. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

Решение. *1-й способ*: $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{10}\sin(x+\varphi)}$, где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. Положим $t = tg\frac{x+\varphi}{2}$, тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right| + C,$$

где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ $(\sin(x+\varphi) \neq 0)$.

2-й способ: $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} =$

$$= \int \frac{dx}{(6tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2}} = -2\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} - 1} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{tg\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right| + C \quad \left(\sin(x+\varphi) \neq 0; \cos\frac{x}{2} \neq 0\right).$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

Решение. Помимо метода универсальной подстановки, этот интеграл можно также вычислить следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + C,$$

где $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 3. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

Решение. Применив универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, придём к интегралу

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C \quad (x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z).$$

5.7. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}$

Для вычисления интеграла $(ac \neq 0)$ перейдём в нём к $d(tgx)$:

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(atg^2 x + btgx + c)\cos^2 x} =$$

$= \int \frac{d(tgx)}{atg^2 x + btgx + c} = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$, где $t = tgx$. Таким образом, получили интеграл, вычисление которого рассматривалось в п.3.2.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(tg^2 x + 2tgx - 1)} = \int \frac{dtgx}{tg^2 x + 2tgx - 1} =$

$$= \int \frac{d(tgx+1)}{(tgx+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx + 1 - \sqrt{2}}{tgx + 1 + \sqrt{2}}\right| + C \quad \left(tgx \neq -1 \pm \sqrt{2}\right).$$

5.8. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, а также $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ $(a \neq b)$

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ используется искусственный приём умножения и одновременного деления подынтегральной функции на одно и то же выражение $\sin(a-b)$ с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов $(\sin(x+a)\sin(x+b) \neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} =$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}dx - \int \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(-\int \frac{d(\cos(x+a))}{\cos(x+a)}dx + \int \frac{d(\cos(x+b))}{\cos(x+b)}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ с помощью формул приведения приводятся к одному из предыдущих видов, например

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+b)\right)} =$$

$$= -\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(x + (b - \frac{\pi}{2})\right)} \text{ и т.д.}$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}$.

Решение. Преобразуем интеграл согласно приведённой выше схеме и вычислим его $(\sin(x-1)\cdot\cos x \neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\sin(x-1)\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}\int\frac{\sin\left((x-1)+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\frac{\sin(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(-\ln|\cos x|+\ln|\sin(x-1)|\right)+C=\frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\cos x}\right|+C.$$

5.9. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}, \int\frac{dx}{\cos x-\cos a}, \int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$ умножим и разделим подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользуемся тождествами $\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}$ и $\cos a=\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\left(\left(\frac{x-a}{2}\right)-\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}+\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

$$(\cos a\neq 0, \sin x\neq\sin a).$$

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$ поступаем аналогично: умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sin a$ и затем воспользуемся тождествами

$$\cos x-\cos a=-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2} \text{ и } \sin a=\sin\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right):$$

$$\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}=-\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\left(\left(\frac{x-a}{2}\right)-\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}-\cos\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2\sin a}\int\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}-\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

$$(\sin a\neq 0, \cos x\neq\cos a).$$

Случай $\int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$ приводится к одному из двух рассмотренных выше при помощи формул приведения:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)} \text{ или } \int\frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos a}.$$

Пример. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}$.

Решение. Имеем $\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\left(\frac{x-5}{2}-\frac{x+5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}+\sin\frac{x-5}{2}\sin\frac{x+5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\left(\frac{\cos\frac{x-5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}}+\frac{\sin\frac{x+5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 5}\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+5}{2}\right)}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 5}\left(\ln\left|\sin\frac{x-5}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+5}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\cos 5}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right|+C.$$

5.10. Интегралы вида $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$, $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$, $\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$

1. При вычислении интегралов вида $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ представим числитель $(a_1\sin x+b_1\cos x)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(a\sin x+b\cos x)$ и его производной $(a\cos x-b\sin x)$:

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

где A и B – постоянные. Найдём A и B методом неопределённых коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для нахождения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{cases}a_1=Aa-Bb\\ b_1=Ab+Ba\end{cases}, \text{ откуда определяем } \begin{cases}A=\dfrac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2}\\ B=\dfrac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим $(a\sin x+b\cos x\neq 0)$:

$$\int\frac{A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}dx=$$

$$=Ax+B\int\frac{(a\cos x-b\sin x)dx}{a\sin x+b\cos x}=$$

$$=Ax+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

Пример 1. $\int\frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в подынтегральной дроби в виде:

$$\sin x - 3\cos x = A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x).$$

Отсюда имеем систему $\begin{cases} 1 = 4A - 5B \\ -3 = 5A + 4B \end{cases}$, из которой находим $\begin{cases} A = -11/41 \\ B = -17/41. \end{cases}$

Подставляя найденные коэффициенты, получим: $\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} dx =$

$$= -\frac{11}{41}\int dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} = -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C.$$

2. Аналогичный подход используется и при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx.$$

А именно, представим числитель дроби в виде:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin x, \cos x$ и свободные члены, находим

$$A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2},\ B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2},\ C = c_1 - Ac.$$

Подставляя в интеграл, окончательно получаем: $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx =$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

где последний интеграл вычисляется универсальной подстановкой

$$t = tg\frac{x}{2},\ (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi,\ n \in Z.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx$.

Решение. Представим числитель $(2\sin x + \cos x - 1)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(\sin x - \cos x + 2)$, его производной $(\cos x + \sin x)$ и константы:

$$2\sin x + \cos x - 1 = A(\sin x - \cos x + 2) + B(\cos x + \sin x) + C.$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C получаем систему:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = -A + B \\ -1 = 2A + C \end{cases},\ \text{откуда}\ A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2},\ C = -2.$$

Поэтому имеем

$$\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x + 2} dx -$$

$$-2\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| -$$

$$-2\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| - 4\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| - 2\sqrt{2}arctg\frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Этот же приём используется при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x\cos x + c_1 \cos^2 x}{a\sin x + b\cos x} dx.$$

Для этого запишем числитель дроби, стоящей под знаком интеграла, в виде следующей линейной комбинации

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x\cos x + c_1 \cos^2 x =$$
$$= (a\sin x + b\cos x)(A\cos x - B\sin x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x\cos x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = -aB + C \\ 2b_1 = aA - bB \\ c_1 = Ab + C \end{cases},$$

решая которую находим

$$A=\frac{b(c_1-a_1)+2ab_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{a(c_1-a_1)-2bb_1}{a^2+b^2},\ C=\frac{a_1b^2+c_1a^2-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в интеграл, получаем

$$\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},\ \text{где } a\sin x+b\cos x\neq 0.$$

Пример 3. $\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в виде:

$$2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x=(A\cos x-B\sin x)(\sin x-2\cos x)+$$
$$+C(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C имеем систему:

$$\begin{cases}2=-B+C\\3=A+2B\\5=-2A+C\end{cases},\ \text{откуда } A=-\frac{3}{5},\ B=\frac{9}{5},\ C=\frac{19}{5}.$$

Поэтому

$$\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{2d tg\frac{x}{2}}{2tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-2}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5\sqrt5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{2}}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{2}}\right|+C.$$

5.11. Интегрирование по частям

Часто в ситуациях, когда под знаком интеграла помимо тригонометрической функции находится функция другого типа (многочлен, логарифмическая или показательная функции и др.), для вычисления интеграла применяется метод интегрирования по частям.

Пример 1. $\int\cos^2(\sqrt{x})dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x}$, откуда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Тогда

$$I=\int\cos^2(\sqrt{x})dx=2\int t\cos^2 tdt=\int t(1+\cos 2t)dt=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt.$$

Последний интеграл вычисляется интегрированием по частям.

$$I=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C\quad(x\geq 0).$$

Пример 2. $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение. $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}=\int\frac{xd(\sin x)}{\sin^3 x}=\int xd\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)=$

$$=-\frac{x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}ctgx+C\quad(x\neq\pi n, n\in Z).$$

Пример 3. $\int(2x^2-1)\cos 2xdx$.

Решение. Разобьём интеграл на два интеграла и проинтегрируем первый из них по частям

$$\int(2x^2-1)\cos 2xdx=2\int x^2\cos 2xdx-\int\cos 2xdx=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\cdot x^2-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2xdx\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=$$

$$=\sin 2x\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx\right)=$$

$$=\sin 2x\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C=$$

$$=\sin 2x\cdot(x^2-1)+x\cos 2x+C.$$

<u>Пример 4</u>. $\int x\cdot tg^2 x dx$.

Решение. $\int x\cdot tg^2 x dx = \int x d(tgx - x) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx =$

$$= x\cdot tgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

<u>Пример 5</u>. $\int x\cdot tg^4 x dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям, положив $u = x, dv = tg^4 x dx$. В данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, поэтому, чтобы найти её, вычислим отдельно интеграл

$$\int tg^4 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tg^2 x dx = \int tg^2 x d(tgx) - \int tg^2 x dx =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C_1.$$

Возьмём в качестве $v(x) = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x$ и продолжим интегрирование:

$$\int x\cdot tg^4 x dx = x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) - \int \left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) dx =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tgx dx - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx\right) - \frac{1}{3}\int tgx d(tgx) - \frac{1}{3}\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx\right) - \frac{tg^2 x}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

5.12. Другие подстановки и подходы к интегрированию

В заключение параграфа рассмотрим примеры интегрирования тригонометрических функций достаточно общего вида, не укладывающихся ни в одну из рассмотренных выше стандартных схем. Для них применяются всё те же приёмы: разнообразные подстановки и преобразования подынтегральной функции.

1. *Понижение степени*. Иногда, если это не нарушает рациональности подынтегрального выражения в интегралах вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, полезно понизить степени $\sin x$ и $\cos x$, используя переход к кратным углам или иным способом.

<u>Пример 1</u>. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Решение. Применяя формулы понижения степени $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, имеем $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)$. Полагая $t = tg 2x$, находим $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} =$

$$= \int \frac{4dx}{1 + 3\cos^2 2x} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4} = arctg\frac{t}{2} + C = arctg\frac{tg 2x}{2} + C.$$

2. *Использование алгебраических и тригонометрических преобразований.*

<u>Пример 2</u>. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

Решение. Пользуясь тождеством $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}$, находим $\left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right)$:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x)dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

<u>Пример 3</u>. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$.

Решение. Используя тождественные преобразования, получаем

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C.$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int\frac{\sin^5 x}{1-\cos x}dx$.

Решение. Если знаменатель дроби тригонометрического вида содержит выражение $1\pm\cos x$ ($1\pm\sin x$), то иногда бывает целесообразно одновременно домножить числитель и знаменатель этой дроби на выражение $1\mp\cos x$ (соответственно, $1\mp\sin x$), и затем упростить знаменатель по основному тригонометрическому тождеству.

$$\int\frac{\sin^5 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}dx=$$
$$=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{\sin^2 x}dx=\int\sin^3 x(1+\cos x)dx=\int\sin^3 xdx+$$
$$+\int\sin^3 xd(\sin x)=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx+\frac{\sin^4 x}{4}=$$
$$=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{\sin^4 x}{4}+C\quad(x\neq 2\pi n, n\in Z).$$

3. *Использование нестандартных подстановок*

<u>*Пример 5*</u>. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1+4\sin x}}$.

Решение. Положим $t=\sqrt{1+4\sin x}$, тогда $t^2=1+4\sin x$, $\cos xdx=$ $=\frac{1}{2}tdt$ и получаем

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1+4\sin x}}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+C.$$

<u>*Пример 6*</u>. $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

Решение. Произведя подстановку $t=\sqrt{1+\cos x}$, находим

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=2\int\frac{dt}{t^2(t^2-2)}=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2-2}\right)dt,$$

где методом неопределённых коэффициентов находим $A=0,\ B=-1,$ $C=0,\ D=1$. Таким образом, имеем

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}+C\quad(x\neq\pi n, n\in Z).$$

<u>*Пример 7*</u>. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}dx$.

Решение. Произведём замену переменной интегрирования, полагая $t=\sqrt{tgx}$, где $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. Тогда приходим к интегралу

$$\int(tgx)^{\frac{3}{2}}dx=\int\frac{2t^4}{1+t^4}dt=2t-2\int\frac{dt}{1+t^4}=$$
$$=2t-2\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right)dt=$$
$$=2t-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\sqrt{2}/2\right)^2+1/2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\sqrt{2}/2\right)^2+1/2}\right)=2t-$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\left(t\sqrt{2}+1\right)+arctg\left(t\sqrt{2}-1\right)\right)+C,$$

где $t=\sqrt{tgx}$.

Пример 8. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Решение. Произведём подстановку $t=\cos^2 x$, тогда $-2\cos x \sin x dx = dt$, т.е. $\sin 2x dx = -dt$. Переходя к новой переменной, получаем

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int (tgx + ctgx)^2 dx$. Ответ: $tgx - ctgx + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

2. $\int \frac{dx}{\sin 3x}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{3x}{2}\right| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z\right)$.

3. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. Ответ: $tg\frac{x}{2} + C \quad (x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z)$.

4. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. Ответ: $\frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right) + C$.

5. $\int \frac{dx}{3+\sin x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C \quad \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right)$.

7. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{4tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{31}} + C$.

8. $\int \frac{dx}{2+\sin x + \cos x}$. Ответ: $\sqrt{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C$.

9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+6\cos x}}$. Ответ: $-\frac{1}{3}\sqrt{1+6\cos x} + C \quad \left(\cos x > -\frac{1}{6}\right)$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}} \quad (tgx > 0)$.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ arctg\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1} + C, t = tgx$.

11. $\int \sin 3x \cos 2x dx$. Ответ: $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$.

12. $\int \cos 4x \cos 2x dx$. Ответ: $\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

13. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$.

Ответ: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + C$.

14. $\int \sin^3(2x)\cos^2(3x)dx$.

Ответ: $-\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$. Ответ: $-\frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

16. $\int \frac{dx}{\sin(x+1)\sin(x+7)}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sin 6}\ln\left|\frac{\sin(x+7)}{\sin(x+1)}\right| + C \quad (x+1 \neq \pi n; x+7 \neq \pi k, n,k \in Z)$.

17. $\int \frac{dx}{\cos(x-1)\cos(x+2)}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sin 3}\ln\left|\frac{\cos(x+2)}{\cos(x-1)}\right| + C \quad \left(x-1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; x+2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n,k \in Z\right)$.

18. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin 4}$.

Ответ: $\frac{1}{\cos 4}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-4}{2}}{\cos\frac{x+4}{2}}\right| + C \quad (x-4 \neq 2\pi n; x+4 \neq \pi + 2\pi k, n,k \in Z)$.

19. $\int \frac{dx}{\cos x - \cos 3}$.

Ответ: $\frac{1}{\sin 3}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-3}{2}}{\sin\frac{x+3}{2}}\right| + C \quad (x-3 \neq 2\pi n; x+3 \neq 2\pi k, n,k \in Z)$.

20. $\int \frac{dx}{\sin 5x - \cos 1} \quad \left(5x \neq \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n; 5x \neq \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k, n,k \in Z\right)$.

Ответ: $\frac{1}{5\sin 1}\ln\left|\frac{\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}+1}{2}}{\cos\frac{5x+\frac{\pi}{2}-1}{2}}\right| + C$.

21. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}tgx\right) + C$.

22. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C$.

23. $\int \frac{dx}{1+tgx} \quad \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n,k \in Z\right)$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + C$.

24. $\int \frac{dx}{1+ctgx}$.

Ответ: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C \quad \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n; x \neq \pi k, n,k \in Z\right)$.

25. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$. Ответ: $-\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C$.

26. $\int \sin^6 x dx$. Ответ: $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

27. $\int tg^5 x dx$.

Ответ: $\frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$.

28. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$. Ответ: $-\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$.

29. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$. Ответ: $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$.

30. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

31. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

Ответ: $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{15}{8}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

32. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{7}} arctg\frac{4tgx}{\sqrt{7}} + C$.

33. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{5}} arctg\frac{3tgx}{\sqrt{5}} + C$.

34. $\int \sin\sqrt{x}dx$. Ответ: $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C \quad (x \geq 0)$.

35. $\int x\sin^3 x dx$. Ответ: $\frac{3}{4}\sin x - \frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{36}\sin 3x + \frac{1}{12}x\cos 3x + C$.

36. $\int x^2\cos x dx$. Ответ: $x^2\sin x + 2(x\cos x - \sin x) + C$.

37. $\int e^{2x}\sin(e^x)dx$. Ответ: $\sin(e^x) - e^x\cos(e^x) + C$.

38. $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin(x^2+4x+1) + C$.

39. $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$. Ответ: $(x+1)^2\sin x + 2(x+1)\cos x + C$.

40. $\int x\sin(x^2)dx$. Ответ: $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$.

41. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. Ответ: $-xctgx+\ln|\sin x|+C \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$.

42. $\int \frac{xdx}{\sin^4 x}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\left(-\frac{xctgx}{\sin^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2xctgx+2\ln|\sin x|\right)+C \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$.

43. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}$. Ответ: $\arcsin\frac{\sin x+2}{\sqrt{6}}+C \quad \left(\sin x<\sqrt{6}-2\right)$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$. Ответ: $-2\sqrt{ctgx}+\frac{2}{3}\sqrt{tg^3 x}+C \quad (\sin 2x>0)$.

45. $\int \sqrt{\cos 2x}\sin xdx$.

Ответ: $-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos 2x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C \quad (\cos 2x \geq 0)$.

46. $\int \sqrt{\cos 2x}\cos xdx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right)+C \quad (\cos 2x \geq 0)$.

47. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}dx$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sin x-1}{\sqrt{2}(1-\sin x)}+C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z; \cos 2x>0\right)$.

48. $\int \frac{\sin^2 xdx}{1+\sin^2 x}$.

Ответ: $x-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\right)$.

49. $\int \frac{\sin xdx}{2\sin x+3\cos x}$.

Ответ: $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C \quad (2\sin x+3\cos x \neq 0)$.

50. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x-3\cos x+2}$.

Ответ: $\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x-2}\right|+C \quad (x \neq 2\pi n, n \in Z)$.

51. $\int \frac{\cos xdx}{\cos^2 x-5\cos x+6} \quad (x \neq \pi+2\pi n, n \in Z)$.

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tg\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}tg\frac{x}{2}\right)+C$.

52. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tg2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

53. $\int \frac{\sin xdx}{\sin^3 x+\cos^3 x} \quad \left(x \neq -\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z; \sin x>0\right)$.

Ответ: $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right)+C$.

54. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x+6}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+C$.

55. $\int \frac{\sin x+\cos x+1}{2\sin x+\cos x+2}dx \quad (2\sin x+\cos x \neq -2; x \neq \pi+2\pi n, n \in Z)$.

Ответ: $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\ln|2\sin x+\cos x+2|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}+3}\right|+C$.

56. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$. Ответ: $-\ln\left(\cos^2+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)+C$.

§ 6.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Интегрирование гиперболических функций

При интегрировании выражений, содержащих гиперболические функции, при необходимости выполнять преобразования над ними используются, в частности, следующие формулы:

основное гиперболическое тождество $ch^2x - sh^2x = 1$;

формулы двойного аргумента: $sh2x = 2\cdot shx\cdot chx$, $ch2x = ch^2x + sh^2x$;

формулы $1 - th^2x = \dfrac{1}{ch^2x}$, $cth^2x - 1 = \dfrac{1}{sh^2x}$;

формулы понижения степени: $ch^2x = \dfrac{ch2x+1}{2}$, $sh^2x = \dfrac{ch2x-1}{2}$;

формулы суммы и разности двух аргументов:

$$sh(x\pm y) = shx\cdot chy \pm shy\cdot chx,\ ch(x\pm y) = chx\cdot chy \pm shx\cdot shy,$$

$$th(x\pm y) = \frac{thx\pm thy}{1\pm thx\cdot thy},\ cth(x\pm y) = \frac{cthx\cdot cthy\pm 1}{cthy\pm cthx};$$

формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$shx\cdot chy = \frac{1}{2}\bigl(sh(x+y) + sh(x-y)\bigr),$$

$$chx\cdot chy = \frac{1}{2}\bigl(ch(x+y) + ch(x-y)\bigr),$$

$$shx\cdot shy = \frac{1}{2}\bigl(ch(x+y) - ch(x-y)\bigr) \text{ и пр.}$$

Подчеркнём, что большинство практических приёмов интегрирования подобного рода выражений имеют свои аналоги среди соответствующих приёмов,

разработанных для тригонометрических функций. Так, интегралы от чётных степеней shx и chx находятся с помощью формул понижения степени $ch^2x = \dfrac{ch2x+1}{2}$, $sh^2x = \dfrac{ch2x-1}{2}$ и $shx\cdot chx = \ = \dfrac{sh2x}{2}$ Интегралы от нечётных степеней shx и chx находятся отделением множителя первой степени и введением новой переменной и т.д. Поэтому отдельно на них останавливаться не будем.

Обратим внимание на существующую связь между табличными интегралами ($a > 0$)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C\ \bigl(|x| > a\bigr), \qquad (1)$$

$$\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ \bigl(|x| \ne a\bigr) \qquad (2)$$

и обратными гиперболическими функциями.

1. Известно, что обратной функцией к гиперболическому синусу $y = shx$ на множестве R является ареа-синус $y = Arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in R$. С учётом этого один из интегралов (1) можно записать в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Arsh\frac{x}{a} + C.$$

2. Известно также, что обратными функциями к двум ветвям гиперболического косинуса $y = chx$, $x\ge 0$ и $y = chx$, $x\le 0$ являются соответственно функции

$$y = Arch^+(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad\text{и}\quad y = Arch^-(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).$$

Обе эти функции, рассмотренные как две ветви двузначной функции, носят название ареа-косинуса и обозначаются $y = Archx = \ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$. С учётом этого получаем, что на промежутке $x > a$ второй из интегралов (1) принимает вид

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = Arch^+\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

3. Наконец, при $|x| < 1$ определена функция, обратная к гиперболическому тангенсу и называемая *ареа-тангенсом* $y = Arthx = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; а на промежутках $|x|>1$ определена функция, обратная к гиперболическому котангенсу и называемая *ареа-котангенсом* $y = Arcthx = \; = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Учитывая это, получаем ещё одну форму записи для интеграла (2):

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases}\frac{1}{a}Arth\frac{x}{a}+C, & если \quad |x|<a \\ \frac{1}{a}Arcth\frac{x}{a}+C, & если \quad |x|>a.\end{cases}$$

Отметим, что к интегрированию гиперболических функций сводятся, в частности, интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)dx$$

подстановкой $x = a\cdot cht$, $t\ge 0$, а также интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$$

подстановкой $x = a\cdot sht$, $t\in R$.

<u>Пример 1</u>. $\int\frac{dx}{shx}$.

Решение. Преобразуя подынтегральное выражение, при $x\ne 0$ получаем (аналогично вычислению интеграла $\int\frac{dx}{\sin x}$):

$$\int\frac{dx}{shx} = \int\frac{dx}{2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}} = \int\frac{dx}{2th\frac{x}{2}ch^2\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(th\frac{x}{2}\right)}{th\frac{x}{2}} = \ln\left|th\frac{x}{2}\right|+C.$$

<u>Пример 2</u>. $\int sh^2xdx$.

Решение. Так как $sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}$, то $\int sh^2xdx = \frac{1}{2}\int(cg2x-1)dx =$

$$=\frac{1}{4}\int ch2xd(2x)-\frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}sh2x-\frac{x}{2}+C.$$

<u>Пример 3</u>. $\int sh^3xdx$.

Решение. $\int sh^2x\cdot shxdx = \int sh^2xd(chx) = \int(ch^2x-1)d(chx) =$

$$=\frac{ch^3x}{3}-chx+C.$$

<u>Пример 4</u>. $\int ch^4xdx$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем $(x\ne 0)$

$$\int ch^4xdx = \frac{1}{4}\int(1+ch2x)^2dx = \frac{1}{4}\int\left(1+2ch2x+\frac{1+ch4x}{2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2ch2x+\frac{1}{2}ch4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+sh2x+\frac{1}{8}sh4x\right)+C.$$

<u>Пример 5</u>. $\int cth^2xdx$.

Решение. $\int\frac{ch^2x}{sh^2x}dx = \int\frac{1+sh^2x}{sh^2x}dx = -cthx+x+C\ \ (x\ne 0)$.

<u>Пример 6</u>. $\int\frac{shx}{\sqrt{ch2x}}dx$. *Решение*.

$$\int\frac{shx}{\sqrt{ch2x}}dx = \frac{1}{\sqrt2}\int\frac{d\left(\sqrt2chx\right)}{\sqrt{\left(\sqrt2chx\right)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt2}\ln\left(\sqrt2chx+\sqrt{ch2x}\right)+C.$$

<u>Пример 7</u>. $\int\frac{dx}{ch^2x\cdot\sqrt[3]{th^2x}}dx$. *Решение*.

$$\int\frac{dx}{ch^2x\cdot\sqrt[3]{th^2x}}dx = \int(thx)^{-\frac{2}{3}}d(thx) = 3\cdot\sqrt[3]{thx}+C\ \ (x\ne 0).$$

<u>Пример 8</u>. $\int chx\cdot ch3xdx$.

Решение. Используя формулу преобразования произведения гиперболических косинусов $ch\alpha\cdot ch\beta = \frac{1}{2}(ch(\alpha-\beta)+ch(\alpha+\beta))$, получим

$$\int chx\cdot ch3xdx = \frac{1}{2}\int(ch2x+ch4x)dx = \frac{1}{4}sh2x+\frac{1}{8}sh4x+C.$$

Пример 9. $\int shx\cdot sh2x\cdot sh3xdx$.

Решение. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы, получаем

$$\int shx\cdot sh2x\cdot sh3xdx=\frac{1}{2}\int sh2x\cdot(ch4x-ch2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(sh6x-sh2x-sh4x)dx=\frac{ch6x}{24}-\frac{ch4x}{16}-\frac{ch2x}{8}+C.$$

Пример 10. $\int\frac{dx}{sh^2x\cdot ch^2x}$.

Решение. Пользуясь основным гиперболическим тождеством

$$ch^2x-sh^2x=1,$$

представим единицу в числителе дроби как гиперболическую единицу:

$$\int\frac{dx}{sh^2x\cdot ch^2x}=\int\frac{ch^2x-sh^2x}{sh^2x\cdot ch^2x}dx=\int\frac{dx}{sh^2x}-\int\frac{dx}{ch^2x}=$$

$$=-cthx-thx+C\ (x\neq 0).$$

Пример 11. $\int\frac{shx\cdot ch^3x}{1+ch^2x}dx$.

Решение. $\int\frac{shx\cdot ch^3x}{1+ch^2x}dx=\int\frac{shx\cdot chx((ch^2x+1)-1)}{1+ch^2x}dx$. Положим $t=1+ch^2x$, откуда $dt=2chx\cdot shx\cdot dx$. Значит, имеем

$$\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t}dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}(1+ch^2x)-\frac{1}{2}\ln(1+ch^2x)+C.$$

Пример 12. $\int\sqrt{thx}dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{thx}$. Тогда $x=Arth(t^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}$ $(|t|<1)$, $dx=\frac{2tdt}{1-t^4}$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int\sqrt{thx}dx=2\int\frac{t^2dt}{1-t^4}=\int\frac{dt}{1-t^2}-\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}-arctgt+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{thx}}{1-\sqrt{thx}}\right)-arctg\sqrt{thx}+C\ (x\geq 0).$$

6.2. Интегрирование показательных функций

Если подынтегральное выражение содержит показательную функцию, то либо этот интеграл сводится к табличному, либо следует подобрать соответствующую подстановку (внести подходящую функцию под знак дифференциала), либо проинтегрировать по частям.

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, где R – рациональная функция, с помощью подстановки $t=e^x$ преобразуется к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию к виду одной показательной функции (тем самым, сведя интеграл к табличному интегралу):

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx=\int(2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x dx=\int 2250^x dx=\frac{2250^x}{\ln 2250}+C.$$

Пример 2. $\int e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

Решение. Внесём функцию $\frac{1}{x^3}$ под знак дифференциала $\frac{dx}{x^3}=d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ и получим

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}d\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C\ (x\neq 0).$$

Пример 3. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Решение. Умножим одновременно числитель и знаменатель дроби на e^x, а затем внесём e^x под знак дифференциала:

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}=\int\frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1}=arctg(e^x)+C.$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Решение. Вынесем e^x из-под знака радикала и затем внесём e^{-x} под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\int \frac{d\left(e^{-x}\right)}{\sqrt{\left(e^{-x}\right)^2+1}} =$$
$$= -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+C.$$

Пример 5. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\frac{dt}{t} =$

$$= \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)+$$
$$+\arcsin\frac{1}{t}+C = \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-x}\right)+C \quad (x \ge 0).$$

Пример 6. $\int \frac{3e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-2e^x-3}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда получаем интеграл $\int \frac{3t^2+t+1}{t\left(t^2-2t-3\right)}dt$. Так как $t\left(t^2-2t-3\right) = t(t+1)(t-3)$, то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3t^2+t+1}{t(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-3}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая тождественно многочлены в числителях, получим

$$3t^2+t+1 = A(t+1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t+1).$$

Если подставить $t = 0$, то находим $A = -\frac{1}{3}$; если же подставить $t = -1$, то получим $B = \frac{1}{2}$. Наконец, если положить $t = 3$, то найдём $C = \frac{31}{12}$. Подставляя найденное разложение под знак интеграла, получим

$$\int \frac{3e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-2e^x-3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}+\frac{31}{12}\int \frac{dt}{t-3} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln t+\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{31}{12}\ln|t-3|+C = -\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+$$

$$+\frac{31}{12}\ln\left|e^x-3\right|+C \quad (x \ne \ln 3).$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решение. Положим $t = e^{\frac{x}{6}}$, тогда

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{dt}{t\left(1+t+t^2+t^3\right)} = 6\int \frac{dt}{t(1+t)\left(1+t^2\right)} =$$
$$= \int \frac{Adt}{t}+\int \frac{Bdt}{t+1}+\int \frac{Ct+D}{1+t^2}dt = \frac{Ax}{6}+B\ln\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)+$$
$$+\frac{C}{2}\ln\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right)+D\,arctg\left(e^{\frac{x}{6}}\right)+C_1.$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A = 6$, $B = C = D = -3$. Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = x-3\ln\left(\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right)-3arctg\left(e^{\frac{x}{6}}\right)+C_1.$$

Пример 8. $\int x^3e^{3x}dx$.

Решение. Полагая $u = x^3$, $dv = e^{3x}dx$, проинтегрируем по частям:

$$I = \int x^3e^{3x}dx = \frac{x^3}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot\left(3x^2\right)dx = \frac{x^3}{3}e^{3x}-\int x^2e^{3x}dx.$$

Полагая теперь $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, второй раз проинтегрируем по частям:

$$I = \frac{x^3}{3}e^{3x}-\left(\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot(2x)dx\right) = \left(x^3-x^2\right)\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

Наконец, полагая $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, последний раз проинтегрируем по частям:

$$I = \left(x^3-x^2\right)\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \left(x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}+C.$$

6.3. Интегрирование логарифмических функций

Если подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию, то так же, как и в случае с показательной функцией, интеграл либо сводится к табличному, либо берётся с помощью некоторой подстановки (функция вносится под знак дифференциала), либо интегрируется по частям.

Пример 1. $\int \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x, v = x$, получаем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C \quad (x > 0).$$

Пример 2. $\int \ln^2 x dx$.

Решение. Дважды интегрируя при $x > 0$ по частям, находим

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\ x\ln x + 2x + C.$$

Пример 3. $\int \ln^n x dx \quad (n \in N)$.

Решение. Интегрируя по частям, получим рекуррентную формулу понижения степени для интегралов данного типа:

$$I_n = \int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx = x\ln^n x - n \cdot I_{n-1}, \text{ где } I_0 = x.$$

Например, $I_1 = x\ln x - x + C$,

$$I_2 = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C,$$

$$I_3 = x\ln^3 x - 3(x\ln^2 x - 2(x\ln x - x)) + C \text{ и т.д. } (x > 0).$$

Пример 4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. Внесём $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \quad (x > 0).$$

Пример 5. $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x, dv = x^2 dx$, получим

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C \quad (x > 0).$$

Пример 6. $\int \frac{dx}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)}$.

Решение. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x\ln x} = d(\ln(\ln x))$, имеем при $x > 1$:

$$\int \frac{dx}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

Пример 7. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

Решение. Заметим, что данный интеграл относится к группе интегралов вида $\int x^n \ln^m x dx \quad (n \in R, n \neq -1, m \in N)$, для которых существует рекуррентная формула понижения степени m:

$$\int x^n \ln^m x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x - \frac{m}{n+1}\int x^n \ln^{m-1} x dx,$$

по которой вычисление рассматриваемого интеграла сводится к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим на единицу показателем степени при $\ln x$. В данном случае $n = -3, m = 3$. На практике держать в уме формулу не имеет большого смысла, проще три раза проинтегрировать по частям:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^3 x dx = -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^2 x + \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \cdot \ln^2 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4x^2}\left(\frac{2}{3}\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2}\right) + C \quad (x > 0).$$

<u>Пример 8</u>. а) $\int \sin(\ln x)dx$; б) $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение. Интегрируя по частям каждый из интегралов, имеем

$$I_1 = \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - I_2$$

$$I_2 = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + I_1 .$$

Отсюда получаем, что $I_1 = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$,

$$I_2 = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C \quad (x > 0).$$

<u>Замечание</u>. Можно было бы найти эти интегралы, интегрируя последовательно каждый из них два раза по частям.

<u>Пример 9</u>. $\int x^x(1 + \ln x)dx$.

Решение. Положим $t = x^x$, тогда $dt = x^x(1 + \ln x)dx$ и для интеграла имеем:

$$\int x^x(1 + \ln x)dx = \int dt = t + C = x^x + C \quad (x > 0).$$

<u>Пример 10</u>. $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx =$

$$= \int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)d\left(\sqrt{1 + x^2}\right) = \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int dx =$$

$$= \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - x + C .$$

<u>Пример 11</u>. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx$.

Решение. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int \ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx = x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx =$$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)d\left(2\sqrt{1 + x^2}\right) =$$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + 2x + C .$$

<u>Пример 12</u>. $\int x\sqrt{x^2 + 1}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2 + 1}$ и проинтегрируем по частям:

$$\int x\sqrt{x^2 + 1}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)dx = \frac{1}{2}\int t^2\ln\left(t^2 - 2\right)dt = \frac{1}{2}\int \ln\left(t^2 - 2\right)d\left(t^3/3\right) =$$

$$= \frac{1}{6}t^3\ln\left(t^2 - 2\right) - \frac{1}{3}\int \frac{t^4 dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{6}t^3\ln\left(t^2 - 2\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} + 2t + \sqrt{2}\ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right|\right) + C = \frac{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}}{3}\ln\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) -$$

$$- \frac{x^2 + 7}{9}\sqrt{x^2 + 1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}} + C \quad (|x| > 1).$$

<u>Пример 13</u>. $\displaystyle\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1}\cdot\ln\frac{1 - x}{1 + x}dx$.

Решение. Положим $x = tht$, тогда $t = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$ и интеграл примет вид

$$\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1}\cdot\ln\frac{1 - x}{1 + x}dx = \int \frac{ath^2t + b}{th^2t - 1}\cdot(-2t)\frac{dt}{ch^2t} = 2\int \left(ath^2t + b\right)tdt =$$

$$= bt^2 + 2a\int t\cdot th^2t dt .$$

Последний интеграл вычисляем интегрированием по частям:

$$\int t\cdot th^2t dt = \int td(t - tht) = t(t - tht) - \int (t - tht)dt = t^2/2 - t\cdot tht +$$

$+ \ln|cht| + C$. Итак, $\displaystyle\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1}\cdot\ln\frac{1 - x}{1 + x}dx = bt^2 + 2a\,(t^2/2 - t\cdot tht +$

$$+ \ln cht) + C = (a + b)t^2 - 2at\cdot tht + 2a\ln|cht| + C =$$

$$= (a + b)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 - ax\cdot\ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2a\ln|ch(Arthx)| + C =$$

$$= \frac{a + b}{4}\ln^2\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + a\left(x\ln\frac{1 - x}{1 + x} - \ln\left(1 - x^2\right)\right) + C ,$$

так как $ch(Arthx) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$

6.4. Интегрирование обратных тригонометрических функций

При интегрировании обратных тригонометрических функций используются всё те же общие приёмы интегрирование (преобразования, замена переменной, интегрирование по частям). Напомним, что интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin x dx\,,\ \int P(x)\arccos x dx\,,\ \int P(x) arctgx dx\,,\ \int P(x) arcctgx dx\,,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен относительно x, вычисляются интегрированием по частям. При этом в качестве u выбираются функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4\cdot\arcsin^4 x}+C \quad (0<|x|<1)$.

Пример 2. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

Решение. Полагая $t = arctg\sqrt{x}$, имеем $x = tg^2 t$, $dx = 2tgt\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$ и тогда

$$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x+1} = \int\frac{t}{tgt}\cdot\frac{2tgt\cdot dt}{\cos^2 t\cdot(tg^2 t+1)} = 2\int tdt =$$

$$= t^2 + C = arctg^2(\sqrt{x}) + C \quad (x>0).$$

Пример 3. $\int \arccos x dx$.

Решение. Интегрируя по частям и полагая $u = \arccos x$, $dv = dx$, определяем $du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int\arccos x dx = x\arccos x + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos x -$$

$$-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \quad (|x|<1).$$

Пример 4. $\int arctgx dx$.

Решение. Полагая $u = arctgx, dv = dx$, интегрируем по частям:

$$\int arctgx dx = x arctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} = x arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= x arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Пример 5. $\int arctg\sqrt{x}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int arctg\sqrt{x}dx = x\cdot arctg\sqrt{x} - \int\frac{xdx}{2\sqrt{x}(x+1)} = x\cdot arctg\sqrt{x} -$$

$$-\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}\right)dx = x\cdot arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int\frac{d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2+1} =$$

$$= x\cdot arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C \quad (x>0).$$

Пример 6. $\int x^2\arccos x dx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $x^2 dx = dv$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int x^2\arccos x dx = \int\arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|\le 1)$:

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}\,d(x^2) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

Пример 7. $\int(\arcsin x)^2 dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим $\int(\arcsin x)^2 dx =$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \arcsin x dx = x\cdot(\arcsin x)^2 +$$

$$+2\int \arcsin x \cdot d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x -$$

$$-2x + C \quad (|x|<1).$$

<u>*Пример 8*</u>. $\int \frac{arctgx}{x^3}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, положим $u = arctgx, \frac{dx}{x^3} = dv$. Тогда $u' = \frac{1}{x^2+1}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и имеем

$$\int \frac{arctgx}{x^3}dx = \int arctgx d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) =$$

$$= arctgx\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2x^2}arctgx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2x^2}arctgx + \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}arctgx + \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{2x^2}arctgx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - arctgx\right) + C = -\frac{1}{2}arctgx\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \frac{1}{2x} + C \quad (x\neq 0).$$

<u>*Пример 9*</u>. $\int x\cdot\arcsin(1-x)dx$.

Решение. Применяя простейшие преобразования, замену $u = 1-x$ и интегрирование по частям, находим $\int x\cdot \arcsin(1-x)dx =$

$$= \int(1-x)\arcsin(1-x)d(1-x) - \int \arcsin(1-x)d(1-x) =$$

$$= \int u \arcsin u du - \int \arcsin u du = \frac{u^2}{2}\arcsin u - \frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} -$$

$$-u\arcsin u + \int\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{u^2}{2}\arcsin u - \frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} -$$

$-u\arcsin u - \sqrt{1-u^2}$. Интеграл $\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}$ вычислим тригонометрической подстановкой $u = \sin t$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \sin^2 tdt = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin u - \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + C_1.$$

Окончательно имеем

$$\int x\cdot\arcsin(1-x)dx = \frac{u^2}{2}\arcsin u - u\arcsin u - \sqrt{1-u^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin u - \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}\right) + C = \frac{1}{2}\arcsin u\cdot\left(u^2 - 2u - \frac{1}{2}\right) -$$

$$-\sqrt{1-u^2}\left(1-\frac{u}{4}\right) + C = \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) - \sqrt{2x-x^2}\cdot\frac{x+3}{4} + C$$

$$(x\in(0,2)).$$

<u>*Пример 10*</u>. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Положим $t = \arcsin x$, разобьём интеграл на сумму двух интегралов и затем один из них проинтегрируем по частям $(0<|x|<1)$:

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{t}{\sin^2 t}\cdot\frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt =$$

$$= \int\frac{t}{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)dt = \frac{t^2}{2} + \int\frac{tdt}{\sin^2 t} = \frac{t^2}{2} - \int td(ctgt) =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t\cdot ctgt + \ln|\sin t| + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x\cdot\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} +$$

$$+\ln|\sin(\arcsin x)| + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln|x| + C.$$

<u>*Пример 11*</u>. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\cdot arctgxdx$.

Решение. Положим $t = arctgx$, тогда $x = tgt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\cdot arctgxdx = \int t\left(atg^2t+b\right)dt = \frac{bt^2}{2} + a\int t\cdot tg^2tdt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\int t\cdot tg^2tdt = \int td\left(tgt - t\right) = t\left(tgt-t\right) - \int\left(tgt-t\right)dt = t\cdot tgt - \frac{t^2}{2} +$$

$$+\ln\left|\cos t\right| + C.$$

Подставляя, окончательно получим

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\cdot arctgxdx = \frac{bt^2}{2} + a\ (t\cdot tgt - \frac{t^2}{2} + \ln\left|\cos t\right|) + C =$$

$$= \frac{b-a}{2}\ t^2 + at\cdot tgt + a\ln\left|\cos t\right| + C = \frac{b-a}{2}\ arctg^2x +$$

$$+ax\cdot arctgx + a\ln\left|\cos\left(arctgx\right)\right| + C = \frac{b-a}{2}\ arctg^2x + ax\cdot arctgx -$$

$$-\frac{1}{2}a\ln\left(1+x^2\right) + C \text{ (так как } \cos\left(arctgx\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{)}.$$

<u>*Пример 12*</u>. $\int \frac{\arcsin\left(e^x\right)}{e^x}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$, тогда $\int \frac{\arcsin\left(e^x\right)}{e^x}dx = \int \frac{\arcsin t}{t^2}dt =$

$$= -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} + C =$$

$$= -e^{-x}\arcsin\left(e^x\right) - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + x + C\quad\left(x<0\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int sh^2xch^2xdx$. Ответ: $\frac{1}{32}sh4x - \frac{1}{8}x + C$.

2. $\int\left(shx - chx\right)^2dx$. Ответ: $\frac{1}{2}sh2x - \frac{1}{2}ch2x + C$.

3. $\int sh\left(ax\right)\cos\left(bx\right)dx$. Ответ: $\frac{ach\left(ax\right)\cos\left(bx\right) + bsh\left(ax\right)\sin\left(bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

4. $\int\sqrt{2^x-1}dx$. Ответ: $\frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x-1} - arctg\sqrt{2^x-1}\right) + C\ \left(x\ge 0\right)$.

5. $\int\frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}}dx$. Ответ: $\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{3}2^{\frac{3x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}\right) + C$.

6. $\int\frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}dx$. Ответ: $\left(\frac{32}{5}\right)^x\left(\ln\frac{32}{5}\right)^{-1} + C$.

7. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$. Ответ: $-2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+4x+8\right) + C$.

8. $\int(2x^2-2x+1)e^{-\frac{x}{2}}dx$. Ответ: $-2\left(2x^2+6x+13\right)e^{-\frac{x}{2}} + C$.

9. $\int e^x\sin xdx$. Ответ: $\frac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right) + C$.

10. $\int e^{2x}\sin^2xdx$. Ответ: $\frac{1}{8}e^{2x}\left(2 - \sin 2x - \cos 2x\right) + C$.

11. $\int e^x\cos\left(e^x\right)dx$. Ответ: $\sin\left(e^x\right) + C$.

12. $\int x^7e^{-x^2}dx$. Ответ: $-\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^6+3x^4+6x^2+6\right) + C$.

13. $\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$. Ответ: $2\left(x-2\right)\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

Ответ: $\frac{1}{2e^x}\left(\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(\sqrt{1-e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(\sqrt{1-e^x}+1\right)}\right| + C$.

15. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}dx$. Ответ: $\frac{1}{4}arctg\frac{e^{2x}}{2}+C$.

16. $\int \frac{e^{x}+e^{2x}}{1-e^{x}}dx$. Ответ: $-e^{x}-2\ln\left|e^{x}-1\right|+C \ \ (x\neq 0)$.

17. $\int \frac{2e^{2x}-e^{x}-3}{e^{2x}-2e^{x}-3}dx$. Ответ: $x+\ln\left|e^{x}-3\right|+C \ \ (x\neq \ln 3)$.

18. $\int \frac{e^{2x}+3e^{x}+16}{e^{4x}-16}dx \ \ (x\neq \ln 2)$.

Ответ: $\frac{1}{32}\ln\left(\left|e^{x}-2\right|^{13}\left(e^{x}+2\right)^{7}\right)+\frac{3}{16}\ln\left(e^{2x}+4\right)-\frac{3}{16}arctg\frac{e^{x}}{2}-x+C$.

19. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^{2}x}}{x}dx$. Ответ: $\frac{3}{5}(\ln x)^{\frac{5}{3}}+C \ \ (x>0)$.

20. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. Ответ: $\ln\left|\ln x\right|+C \ \ (x>0; x\neq 1)$.

21. $\int \frac{\ln x}{x^{2}}dx$. Ответ: $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C \ \ (x>0)$.

22. $\int \frac{\ln x}{x^{3}}dx$. Ответ: $-\frac{2\ln x+1}{4x^{2}}+C \ \ (x>0)$.

23. $\int x\ln^{2}x dx$. Ответ: $\frac{1}{4}x^{2}\left(2\ln^{2}x-2\ln x+1\right)+C \ \ (x>0)$.

24. $\int \sqrt{x}\ln^{2}x dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^{2}x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C \ \ (x>0)$.

25. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. Ответ: $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C \ \ (x>0)$.

26. $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$. Ответ: $\frac{x^{2}}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+x\right|+C \ \ (x\notin[-1,0])$.

27. $\int x\ln\frac{x}{1+x^{2}}dx$. Ответ: $\frac{x^{2}}{2}\ln\frac{x}{1+x^{2}}+\frac{1}{4}x^{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C \ \ (x>0)$.

28. $\int \ln\left(x^{2}+x\right)dx$. Ответ: $x\ln\left(x^{2}+x\right)+\ln\left|x+1\right|-x+C \ \ (x\notin[-1,0])$.

29. $\int x^{2}\ln(1+x)dx$.

Ответ: $\frac{x^{3}}{3}\ln(1+x)-\frac{x^{3}}{9}+\frac{x^{2}}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C \ \ (x>-1)$.

30. $\int \cos^{2}(\ln x)dx$.

Ответ: $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}+C \ \ (x>0)$.

31. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^{2}x}dx$. Ответ: $tgx\cdot\ln(\cos x)+tgx-x+C \ \ \left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right)$.

32. $\int \sin 2x\ln\cos x dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\cos^{2}x(1-2\ln\cos x)+C \ \ (\cos x>0)$.

33. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^{2}\ln x+x^{3}}}dx$. Ответ: $2\sqrt{\ln x+x}+C \ \ (\ln x+x>0; x>0)$.

34. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{\left(1+x^{2}\right)^{3}}}dx$. Ответ: $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^{2}}}-\ln\left|x+\sqrt{1+x^{2}}\right|+C \ \ (x>0)$.

35. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$.

Ответ: $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C \ \ (|x|<1)$.

36. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\sqrt{\left(1+x^{2}\right)^{3}}}dx$.

Ответ: $\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C$.

37. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx \ \ (0<x<1)$.

Ответ: $-\sqrt{1-x^{2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^{2}}+C$.

38. $\int x\cdot arctgx\cdot\ln\left(1+x^{2}\right)dx$.

Ответ: $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\left(3+x^{2}\right)arctgx-\frac{x}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+\frac{x^{2}+1}{2}\cdot arctgx\cdot\ln\left(1+x^{2}\right)+C$.

39. $\int x\arcsin x dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$.

40. $\int x arcctg x dx$. Ответ: $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}arcctg x+C$.

41. $\int x^2\arcsin x dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C\ \left(|x|\le 1\right)$.

42. $\int x^2 arctg x dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3}arctg x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

43. $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot\operatorname{sgn}x+C\ \left(|x|\ge 1\right)$.

44. $\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$. Ответ: $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\ \left(|x|<1\right)$.

45. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$. Ответ: $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C\ \left(0<|x|\le 1\right)$.

46. $\int x^3 arctg^2 x dx$. Ответ: $\frac{1}{4}x^4 arctg^2 x-\frac{1}{4}arctg^2 x-$

$$-\frac{1}{6}\left(x^3-3x\right)arctg x+\frac{x^2}{12}-\frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

47. $\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$. Ответ: $t\cdot tg^2 t-tgt+t$, где $t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ \left(x>0\right)$.

48. $\int\frac{arcctg(3x)}{1+9x^2}dx$. Ответ: $-\frac{1}{6}arcctg^2(3x)+C$.

49. $\int\frac{x+\arccos^{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ответ: $-\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}\arccos^{\frac{5}{2}}x+C\ \left(|x|<1\right)$.

50. $\int\frac{x+\arcsin^3(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Ответ: $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{8}\arcsin^4(2x)+C\ \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$.

51. $\int\frac{x+\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2}dx$. Ответ: $\frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right)+\frac{1}{3}arctg^{\frac{3}{2}}(2x)+C\ \left(x\ge 0\right)$.

52. $\int\frac{\arcsin x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\arcsin^2 x+\arccos^2 x\right)+C\ \left(|x|<1\right)$.

53. $\int\frac{x^2-2}{x^2+1}arctg x dx$. Ответ: $x arctg x-\frac{3}{2}arctg^2 x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

54. $\int\frac{3+2x^2}{x^2+1}arctg x dx$. Ответ: $2x arctg x+\frac{1}{2}arctg^2 x-\ln\left(1+x^2\right)+C$.

55. $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Ответ: $-\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2+x^2}{3}\right)\arccos x-\frac{6x+x^3}{9}+C\ \left(|x|<1\right)$.

56. $\int\frac{x^4 arctg x}{1+x^2}dx$.

Ответ: $\frac{arctg^2 x}{2}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)arctg x-\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

57. $\int\frac{arctg\left(e^{\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(1+e^x\right)}dx$.

Ответ: $-2e^{-\frac{x}{2}}arctg\left(e^{\frac{x}{2}}\right)-\left(arctg\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\right)^2+x-\ln\left(1+e^x\right)+C$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. /СПб: Мифрил, 1995. –489с.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления/ М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры. Том 2. – 1969, 800 с., ил.

3. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов./ Под ред. Садовничего В.А. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк. 2000. – 725 с.: ил.

4. *Ильин В.А.., Садовничий В.А.., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. /Под ред. Тихонова А.Н.. – 2-е изд., – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.

5. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие/ Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Под ред. Бутузова В.Ф.–4-е изд., исп. – М.: Физ.-мат. лит-ра, 2001. – 480 с.

6. Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1./ Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. – Киев: Вища школа, 1978. – 696 с.

7. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1/ Учеб. пособие для втузов. –5-е изд., исп. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.

8. *Гусак А.А.* Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения./ Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.

9. Математика. Большой энциклопедический словарь. /Под ред. Прохорова Ю.В. – 3-е изд. – М.: «Большая Российская энциклопедия», 2000. – 848с.: ил.

10. Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов/ Садовничий В.А., Подколзин А.С. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2003. – 208 с.: ил.

11. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: IX–X классы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с., ил.

12. Таблицы неопределённых интегралов./ Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. 2-е изд., исп. – М.: Физматлит, 2003. – 199 с.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

(в помощь практическим занятиям)

Учебное пособие
для студентов университетов

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова
2-й учебный корпус

Напечатано с готового оригинал-макета
Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 28.09.2007.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 11,5. Тираж 500 экз. Заказ 483.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627к.
Тел.: 939-38-90, 939-38-91. Факс: 939-38-91